Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 12 – 20.1.2021

Aufgabe 56
Es sei $\mathbb{R}_2[x]$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2. [1] Ferner sei $\frac{d}{dx}\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ die (formale) Ableitung, d.h., $\frac{d}{dx}(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2x + a_1$ für a_0, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Matrix $M(\frac{d}{dx}; \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i)$ für folgende Basen:

(a) $\mathcal{B}_1 = (1, x, x^2)$,
(b) $\mathcal{B}_2 = ((x-1)^2, x^2, (x+1)^2)$.

Lösung:
Wir benutzen die gleiche Methode wie in der Lösung von Aufgabe 54.
(a) Es gelten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\frac{d}{dx}(x) &= 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\
\frac{d}{dx}(x^2) &= 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$M(\frac{d}{dx}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen zunächst

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}((x-1)^2) &= 2x - 2 \\
\frac{d}{dx}(x^2) &= 2x \\
\frac{d}{dx}((x+1)^2) &= 2x + 2.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir jedes $f \in \{2x-2, 2x, 2x+2\}$ als Linearkombination von $(x-1)^2$, x^2, $(x+1)^2$ schreiben. Für a, b, $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a(x-1)^2 + bx^2 + c(x+1)^2 = (a+b+c)x^2 + (-2a+2c)x + (a+c).$$

Die Gleichung $f = a(x-1)^2 + bx^2 + c(x+1)^2 = (a+b+c)x^2 + (-2a+2c)x + (a+c)$ liefert nun durch Koeffizientenvergleich (warum dürfen wir dies machen?) ein lineares Gleichungssystem für a, b, c. Wir müssen also drei lineare Gleichungssystem lösen, deren linke Seiten aber ident sind. Wir können sie daher simultan lösen:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{2z_3+z_2} \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{4}z_2+z_1 \\ -\frac{1}{4}z_2+z_3 \\ \frac{1}{4}z_2}}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \xrightarrow{-z_3+z_1} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}.$$

---

[1] $\mathbb{R}_2[x]$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}[x]$, vergleiche Beispiel 4.12 in Prof. Kappels Skriptum.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}((x-1)^2) = 2x - 2 &= -\frac{3}{2}(x-1)^2 + 2x^2 - \frac{1}{2}(x+1)^2\\ \frac{d}{dx}(x^2) = 2x &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{2}(x+1)^2\\ \frac{d}{dx}((x+1)^2) = 2x + 2 &= \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2x^2 + \frac{3}{2}(x+1)^2,\end{aligned}$$

und damit

$$M(\frac{d}{dx}; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 57
Es sei V ein 2-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $T\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Weiters sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von V und

$$M(T; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{mit } a,\, b,\, c,\, d \in K.$$

Zeigen Sie, dass T genau dann bijektiv ist, wenn gilt $ad - bc \neq 0$.

Lösung:
Wir wissen, dass T genau dann bijektiv ist, wenn der Rang von T gleich 2 ist. Weiters wissen wir, dass der Rang von T gleich dem Rang der Matrix $M(T; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ ist. Wir müssen daher nur die Äquivalenz

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2 \iff ad - bc \neq 0$$

zeigen. Dazu unterscheiden wir die Fälle $a \neq 0$ und $a = 0$.
$a \neq 0$: Wir formen um:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{-\frac{c}{a}z_1 + z_2} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass sich der Rang bei dieser Umformung nicht ändert. Wegen $a \neq 0$ erhalten wir

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2 \iff \operatorname{rang} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} \end{pmatrix} = 2 \iff \frac{ad - bc}{a} \neq 0 \iff ad - bc \neq 0.$$

$a = 0$:

$$\begin{aligned}\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2 \iff \operatorname{rang} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix} = 2 \iff b \neq 0 \text{ und } c \neq 0 \iff -bc \neq 0 \overset{a=0}{\iff}\\ \iff ad - bc \neq 0.\end{aligned}$$

Aufgabe 58
Bestimmen Sie alle Polynomfunktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad 3, für die gilt: $f(1) = 0$, $f(-1) = 1$ und $f'(2) = -1$.

Lösung:
Wir machen den Ansatz $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit zu bestimmenden a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= f(1) = a + b + c + d\\ 1 &= f(-1) = -a + b - c + d\\ -1 &= f'(2) = 12a + 4b + c,\end{aligned}$$

also ein lineares Gleichungssystem für a, b, c, d, das wir in bekannter Weise lösen:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & -1 \end{array} \xrightarrow[-12z_1+z_3]{z_1+z_2} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -11 & -12 & -1 \end{array} \xrightarrow{4z_2+z_3} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & 3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{11}z_3+z_1} \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & 3 \end{array} \xrightarrow{-\frac{1}{2}z_2+z_1} \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{11} & -\frac{5}{22} \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & 3 \end{array} \xrightarrow[-\frac{1}{11}z_3]{\frac{1}{2}z_2}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{11} & -\frac{5}{22} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \end{array}.$$

Also können wir d frei wählen und es gelten

$$a = \frac{4}{11}d - \frac{5}{22}, \quad b = -d + \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{4}{11}d - \frac{3}{11}.$$

Damit haben sind die gesuchten Polynomfunktionen genau diejenigen, für die es ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \left(\frac{4}{11}d - \frac{5}{22}\right)x^3 + \left(-d + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{4}{11}d - \frac{3}{11}\right)x + d$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt.

Aufgabe 59

Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K, und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind (für $1 \leq k \leq n$).

(a) Es existiert ein k-dimensionaler Unterraum $W \subseteq V$ mit $\varphi(W) \subseteq W$.

(b) Es existiert eine geordnete Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass die Einträge der links oberen $k \times k$-Teilmatrix von $M(\varphi; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ gleich 0 sind. D.h., die Matrix hat die Struktur

$$M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{array}{c} k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ n-k\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{array}\right), \quad \text{Spalten: } \underbrace{\quad\quad}_{k}\ \underbrace{\quad\quad}_{n-k}.$$

Lösung:

(a) $\Longrightarrow$ (b): es sei $W \subset V$ ein k–dimensionaler Unterraum von V mit $\varphi(W) \subseteq W$. Wir wählen eine geordnete Basis $(v_1, \dots, v_k)$ von W und ergänzen diese zu einer geordneten Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ von V. Wir zeigen, dass $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ die gewünschte Gestalt hat. Dazu sei $i \in \{1, \dots, k\}$. Wegen $\varphi(v_i) \in W$ gibt es $a_{1,i}, \dots, a_{k,i} \in K$ mit

$$\varphi(v_i) = a_{1,i}v_1 + \dots a_{k,i}v_k = a_{1,i}v_1 + \dots a_{k,i}v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \dots + 0 \cdot v_n.$$

Wir sehen, dass

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

die i–Spalte von $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ ist. Da dies für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt, hat $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ die gewünschte Gestalt.
(b) $\Longrightarrow$ (a): es sei also $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis, sodass $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ die angegebene Gestalt hat. Wir setzen $W = [v_1, \ldots, v_k]$. Da $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig ist, ist $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von W und es folgt $\dim(W) = k$. Wir zeigen noch $\varphi(W) \subset W$. Da jedes $w \in W$ eine Linearkombination der $v_1, \ldots, v_k$ ist, genügt es dazu $\varphi(v_i) \in W$ für $i = 1, \ldots, k$ zu zeigen. Es sei also $i \in \{1, \ldots, k\}$. Dann hat die i–Spalte von $M(\varphi, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ die Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{k,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\varphi(v_i) = a_{1,i}v_1 + \ldots a_{k,i}v_k + 0 \cdot v_{k+1} + \ldots + 0 \cdot v_n = a_{1,i}v_1 + \ldots a_{k,i}v_k \in W.$$

Aufgabe 60
Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Wir verwenden wieder unsere Standardmethode:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[-z_1+z_4]{\substack{-z_1+z_2 \\ -z_1+z_3}} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[-5z_5+z_3]{-7z_5+z_4} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -19 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow[z_2+z_4]{z_2+z_3} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{matrix} \xrightarrow[-\frac{28}{22}z_3+z_4]{-\frac{3}{22}z_3+z_2} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Zeilen vertauschen}} \begin{matrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Wir sehen, dass die gegebene Matrix Rang 4 hat.