Lineare Algebra 1 (NAWI) – WS 2020/21

Übungsblatt 13 – 27.01.2021

Aufgabe 61
Betrachten Sie den Vektorraum V der reellen Funktionen mit der Basis $\mathcal{B} = (\sin(x), \cos(x))$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' = (2\sin(x) + \cos(x), 3\cos(x))$ auch eine Basis von V ist. Bestimmen Sie $M(\mathrm{Id}, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ und $M(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Mit Id bezeichnen wir die identische Abbildung $V \to V$, d.h., $\mathrm{Id}(v) = v$ für alle $v \in V$.

Lösung:
Auch wenn es eigentlich nicht Teil der Aufgabe ist, zeigen wir als erstes, dass sin und cos wirklich linear unabhängig sind (also eine Basis von V bilden). Es seien also λ, $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \sin + \mu \cos = 0$. Dann folgen

$$0 = (\lambda \sin + \mu \cos)(0) = \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu,$$
$$0 = (\lambda \sin + \mu \cos)(\frac{\pi}{2}) = \lambda \sin(\frac{\pi}{2}) + \mu \cos(\frac{\pi}{2}) = \lambda.$$

Nun zurück zur Aufgabe. Zunächst ist klar, dass $2\sin + \cos$ und $3\cos$ in V enthalten sind. Wegen

$$\begin{aligned} \sin &= \frac{1}{2}(2\sin + \cos) - \frac{1}{6}(3\cos), \\ \cos &= 0 \cdot (2\sin + \cos) + \frac{1}{3}(3\cos) \end{aligned} \tag{1}$$

wird V auch von $2\sin + \cos$ und $3\cos$ erzeugt. Aus $\dim(V) = 2$ folgt nun, dass $\mathcal{B}'$ eine Basis von V ist.
Aus

$$\mathrm{Id}(\sin) = \sin \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}(2\sin + \cos) - \frac{1}{6}(3\cos)$$
$$\mathrm{Id}(\cos) = \cos \overset{(1)}{=} 0 \cdot (2\sin + \cos) + \frac{1}{3}(3\cos)$$

erhalten wir

$$M(\mathrm{Id}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad .$$

Analog folgt aus

$$\mathrm{Id}(2\sin + \cos) = 2\sin + \cos$$
$$\mathrm{Id}(3\cos) = 0\sin + 3\cos$$

$$M(\mathrm{Id}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 62
Wir betrachten den Vektorraum $M_{2,2}(\mathbb{R})$ der rellen 2×2 Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $A \mapsto MA$ linear ist.

(c) Bestimmen Sie $M(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

Lösung:
(a) Aus
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
folgt erstens, dass die vier Matrizen
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$M_{2,2}(\mathbb{R})$ erzeugen und zweitens, dass sie auch linear unabhängig sind (denn eine Matrix ist genau dann Null, wenn alle ihre Einträge Null sind). Also bilden sie eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Damit gilt $\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$.
Bemerkung: Da $M_{2,2}(\mathbb{R})$ isomorph zum Vektrraum $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ist, folgt dies auch schneller aus
$$\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = \dim(L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)) = \dim(\mathbb{R}^2)\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Nun gilt
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (y-z)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (z-w)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$
für jedes $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wir sehen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist. Wegen $\dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) = 4$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
(b) Für alle A, $A' \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten
$$\begin{aligned} \varphi(A + A') &= M(A + A') = MA + MA' = \varphi(A) + \varphi(A') \\ \varphi(\lambda A) &= M(\lambda A) = \lambda(MA) = \lambda\varphi(A) \end{aligned}$$
(wir haben dabei benutzt, dass $M_{2,2}(\mathbb{R})$ eine $\mathbb{R}$–Algebra ist; siehe Definition 7.5 im Skriptum). Also ist φ linear.
(c) Wir berechnen $\varphi(B)$ für alle Basisvektoren B von $\mathcal{B}$:
$$\begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \\ &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a-c)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \\ &= b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a-c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} \overset{(2)}{=} \\ &= 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (a+b-c-d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (c+d)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ -c & a-c & a-c-d & a+b-c-d \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & c & c+d \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 63
Betrachten Sie die Menge

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a - b + 2c = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass W ein Unterraum des Vektorraums $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist und finden Sie eine Basis von W.

Lösung:
Wir haben in der Lösung zu Aufgabe 62 gesehen, dass

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ist. Daher gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Für ein beliebiges $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ folgt

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + 2c.$$

Daher ist $W = \ker(\varphi)$ ein Unterraum von $M_{2,2}(\mathbb{R})$. Wegen

$$\varphi \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ ist φ surjektiv. Damit folgt

$$\dim(W) = \dim(\ker(\varphi)) = \dim(M_{2,2}(\mathbb{R})) - \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 4 - 1 = 3.$$

Ist $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$, so folgt $a = b - 2c$, und damit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-2c & b \\ c & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in W$$

folgt, dass

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

W erzeugt. Wegen $\dim(W) = 3$ ist $\mathcal{B}$ eine Basis von W.

Aufgabe 64
Berechnen Sie alle möglichen paarweisen Produkte der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Ist X eine $m \times n$ Matrix und Y eine $r \times s$ Matrix, so ist XY genau dann definiert, wenn $n = r$ ist. Damit sind genau die Produkte

$$AB, \quad BA, \quad AC, \quad AD, \quad EA, \quad CB, \quad CC, \quad CD, \quad DE$$

definiert. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix} = 17 \\
BA &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 21 & 3 \end{pmatrix} \\
AC &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 1 \end{pmatrix} \\
AD &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & 5 \end{pmatrix} \\
EA &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 14 & 2 \end{pmatrix} \\
CB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \\
CC &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
CD &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\
DE &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 65
Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen für allgemeine Matrizen $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ für $n \in \mathbb{N}$ gelten:

(a) Wenn $AB = 0$, dann $BA = 0$.

(b) Wenn $A, B \neq 0$, dann $AB \neq 0$.

(c) Wenn $AB + BA = 0$, dann $A^2B^3 = B^3A^2$.

(d) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Lösung:
Wir zeigen zunächst, dass die Aussage in c) für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gilt. Dazu seien $n \in \mathbb{N}$ und A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ mit $AB + BA = 0$. Dann ist $AB = -BA$ und daher

$$AB^3 = ABBB = -BABB = BBAB = -B^3A$$

und damit

$$A^2B^3 = AAB^3 = -AB^3A = B^3A^2.$$

Nun zu a), b) und d). Da (zumindest für mich) nicht ganz klar ist, ob $n \in \mathbb{N}$ fixiert ist oder nicht, zeigen wir folgendes: für $n = 1$ sind a), b), d) für alle A, $B \in M_{1,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$ wahr, während für $n \geq 2$ a), b) d) nicht für alle A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ gelten. Dass a), b), d) im Fall $n = 1$ für alle A, $B \in \mathbb{K}$ wahr sind, ist klar.
Es sei jetzt $n \geq 2$. Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

Dann gelten

$$AB = 0, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 1 & * \\ * & * \end{pmatrix} \neq 0.$$

Daher gelten a), b) nicht für alle A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Die obige Gleichung zeigt auch $AB \neq BA$. Daher ist

$$(A + B)(A - B) - (A^2 - B^2) = A^2 - AB + BA - B^2 - A^2 + B^2 = -AB + BA \neq 0$$

und damit $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$. Also gilt auch d) nicht für alle A, $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$.