

Aufgabe 12. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= 1 \\x_3 - x_2 &= 1 \\&\vdots \\x_n - x_{n-1} &= 1 \\ \alpha x_n + x_1 &= \beta\end{aligned}$$

keine/eine eindeutige/unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 13. Zeige mittels Vektorrechnung, daß die Schwerlinien eines Dreiecks (auch *Seitenhalbierende* genannt) einander in einem Punkt schneiden und bestimme diesen Punkt.

Aufgabe 14. Welche der folgenden Strukturen (X, \circ) sind Halbgruppen, Monoide, Gruppen? Bestimme ggf. neutrale, invertierbare und inverse Elemente und untersuche, ob die Verknüpfungen kommutativ sind.

- (a) $X = \mathbb{R}$, Verknüpfung $x \circ y = \max(x, y)$
 (b) $X = \{a, b, c\}$, Verknüpfungstabelle

\circ	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

- (c) $X = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, Verknüpfung $(a, b) \circ (c, d) = (a + bc, bd)$
 (d) $X = \mathcal{P}(M)$ (wobei M eine beliebige gegebene Menge ist), Verknüpfung $A \circ B = A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Aufgabe 15. Zeige, daß $G = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der Verknüpfung

$$a \circ b := a + b + ab$$

eine Gruppe ist. Löse in G die Gleichung

$$5 \circ x \circ 6 = 17$$