**Aufgabe 16.** Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element $e$. Zeige, daß für jedes $x \in G$ eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert sodaß

$$x^n = \underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{n} = e$$

**Aufgabe 17.**
(a) Erstelle die Verknüpfungstafel der symmetrischen Gruppe $S_3$.
(b) Bestimme für jedes Element $\sigma \in S_3$ jeweils den kleinsten Exponenten sodaß $\sigma^k = e$ (siehe Aufgabe 16).

**Aufgabe 18.** Erstelle die Verknüpfungstafel der Symmetriegruppe eines Quadrats $ABCD$ und Stelle die Elemente als Permutationen der Eckpunkte dar.

**Aufgabe 19.** Sei $(G, \circ)$ eine Halbgruppe. Wir betrachten folgende Eigenschaften:
(i) $\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a$
(ii) $\forall a \in G \exists b \in G : a \circ b = e$
(iii) $\forall a \in G \exists b \in G \forall c \in G : a \circ b \circ c = c$
(a) Zeige, daß (i)$\wedge$(ii) $\iff$ (iii).
(b) Finde ein Beispiel einer Halbgruppe, die die Eigenschaften (i)–(iii) aufweist, aber keine Gruppe ist.

**Aufgabe 20.** Erstelle die Verknüpfungstafel der multiplikativen Halbgruppe $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$ und bestimme alle invertierbaren Elemente.

**Aufgabe 21.** Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element $e$. Zeige, daß $G$ eine abelsche Gruppe ist genau dann, wenn für alle $x, y \in G$ gilt $x \circ y \circ x^{-1} \circ y^{-1} = e$.