

Aufgabe 22. Bestimme alle Lösungen $x \in \mathbb{Z}$ der Gleichungen

(a) $4x \equiv 3 \pmod{7}$

(b) $6x \equiv 3 \pmod{9}$

(c) $6x \equiv 4 \pmod{9}$

Aufgabe 23. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß die Abbildung

$$f : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto x^{-1}$$

bijektiv ist und daß f ein Automorphismus ist genau dann, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 24.

(a) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeige, daß für $g \in G$ die Abbildung

$$\lambda_g : G \rightarrow G$$

$$x \mapsto g \circ x$$

bijektiv ist.

(b) Eine abelsche Gruppe heißt *einfach*, wenn sie außer $H = \{e\}$ und $H = G$ keine weiteren Untergruppen besitzt. Zeige, daß $(\mathbb{Z}_n, +)$ einfach ist genau dann, wenn $n \in \mathbb{P}$ (Primzahl).

Aufgabe 25. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sei $T_{\alpha, \beta}$ die Abbildung

$$T_{\alpha, \beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \alpha x + \beta$$

Zeige, daß $A_1 = \{T_{\alpha, \beta} \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}\}$ eine nichtabelsche Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung bildet. Bestimme das neutrale Element und zu jedem $T_{\alpha, \beta}$ das inverse Element.