

Aufgabe 31. Zeige die folgenden Rechenregeln für komplexe Zahlen z, z_1, z_2 :

- (a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- (b) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$
- (c) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$
- (d) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- (e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- (f) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- (g) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Aufgabe 32. Ein *Integritätsbereich* ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins.

- (a) Zeige: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.
- (b) Finde ein Beispiel für einen unendlichen Integritätsbereich, der kein Körper ist.

Aufgabe 33. Ein Element x eines Rings R heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x^n = 0$ in R .

- (a) Sei R ein Ring mit Eins und $x \in R$ nilpotent. Zeige: $1 + x$ und $1 - x$ besitzen multiplikative Inverse in R .
- (b) Zeige: Für je zwei nilpotente Elemente x, y eines kommutativen Rings R ist $x + y$ ebenfalls nilpotent.