Aufgabe 34. Welche der folgenden Strukturen sind Vektorräume? Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?
(a) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ mit den üblichen Operationen.
(b) $V = \mathbb{Q}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den üblichen Operationen.
(c) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Aufgabe 35. Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume des Vektorraums $\mathbb{R}^3$?
(a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 = 0\}$
(c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3\}$
(d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = x_3\}$
(e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \neq x_3\}$
(f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_i = 0 \text{ für mindestens ein } i \in \{1, 2, 3\}\}$

Aufgabe 36. Im Folgenden betrachten wir Mengen von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ in (c) und (d)) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ mit den Operationen mit den $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$. Welche der folgenden Teilmengen sind Vektorräume?
(a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$.
(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$.
(c) $\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid \exists x \in [0, 1] : f(x) = 0\}$.
(d) $\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in [0, 1]\}$.
(e) $\{f : \mathbb{R} \to [0, 1] \mid f(x) = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } x \in \mathbb{R}\}$.
(f) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists C > 0 : f(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| > C\}$

Aufgabe 37. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_7$.

Aufgabe 38. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & iy & + & iz & = & -1 + i \\ (1 - 2i)x & - & (1 + 2i)y & + & (1 - i)z & = & 2 - i \\ -x & + & (-1 + i)y & - & z & = & -1 - i \end{array}$$

über dem Körper der komplexen Zahlen.