Aufgabe 39. Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die linearen Hüllen der Mengen

$$S_1 = \{(1,0)\}, \quad S_2 = \{(1,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}, \quad S_3 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

Aufgabe 40. Sei V ein Vektorraum und seien $M, N \subseteq V$ Teilmengen. Zeige, daß für die linearen Hüllen gilt $[M] = [N]$ genau dann, wenn

$$M \subseteq [N] \wedge N \subseteq [M]$$

Aufgabe 41. Sei U der Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der von den Vektoren

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimme eine Basis von U.
(b) Erweitere diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 42. Stelle fest, für welche Werte von t die Familie

$$\left(\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix} \right)$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^3$ ist, wenn

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 43. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subseteq V$ eine Teilmenge (nicht unbedingt endlich), sodaß $V = L(A)$. Zeige, daß man eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$ auswählen kann, die eine Basis von V bildet.
Hinweis: Konstruiere zunächst eine endliche Teilmenge von A, die den Vektorraum erzeugt.

Aufgabe 44. Bestimme alle linear abhängigen Teilfamilien der Familie

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

im Vektorraum $\mathbb{R}^3$.