Aufgabe 51. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $|\mathbb{K}| \geq 3$. Zeige: Eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq V$ ist genau dann eine lineare Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\forall a, b \in M \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda a + (1-\lambda) b \in M$$

Aufgabe 52. Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^4$ betrachten wir den Unterraum

$$U = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

(a) Bestimme die Dimension des Faktorraums $V_{/U}$.
(b) Begründe, daß es möglich ist, aus den Äquivalenzklassen der Einheitsvektoren $e_i + U$ eine Basis des Faktorraums $V_{/U}$ zu wählen, und wähle eine solche Basis.
(c) Bestimme die Koordinaten des Vektors $v + U$ bezüglich dieser Basis, wobei

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 53. Welche der folgenden Abbildungen $V \to W$ sind linear?
(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.
(b) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$, $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$
(c) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^2$, $f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_1)$
(d) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{Z}_3^2$, $W = \mathbb{Z}_3$, $f : (x_1, x_2) \mapsto x_1^3 + x_2^3$.
(e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(f) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = W = \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$.
(g) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto p(x-1)$.
(h) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto p(x) - 1$.
(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto p(x) - p(1)$.
(j) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto x^2 \cdot p(x)$.
(k) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto p(x^2)$.
(l) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = W = \mathbb{R}[x]$, $f : p(x) \mapsto p(x)^2$.

Aufgabe (Extrapunkt)**.** Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die die Bedingung $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^2$ erfüllt, die aber trotzdem nicht linear ist.

Aufgabe 54. Sei $V = (\mathbb{Z}_5)^3$. Begründe, daß es genau eine lineare Abbildung $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathbb{Z}_5$ mit den Werten

$$f((1,1,1)) = 1, \qquad f((1,4,1)) = 2, \qquad f((1,4,4)) = 4$$

gibt und bestimme $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$, $f(0,0,1)$.