Aufgabe 55. Skizziere das Bild des geschlossenen Polygonzugs $(0,0)$–$(2,0)$–$(2,2)$–$(1,3)$–$(0,2)$–$(0,0)$ unter den linearen Abbildungen f und g, die durch die folgenden Werte eindeutig (warum?) festgelegt sind:

$$f(e_1) = e_1 \qquad g(e_1+e_2) = 2e_1$$
$$f(e_2) = e_1 + e_2 \qquad g(e_1-e_2) = 2e_2$$

Ändert sich der Flächeninhalt der Figur?

Aufgabe 56. Zeige, daß die Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x-y \\ -x+y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x-y+z \\ -x+y+z \\ -z \end{bmatrix}$$

linear sind und berechne Basen von Kern und Bild der Abbildungen f, g und $g \circ f$.

Aufgabe 57. Seien U, V und W Vektorräume über $\mathbb{K}$ sowie $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß

$$\dim \ker(g \circ f) \leq \dim \ker f + \dim \ker g.$$

Hinweis: Berechne Kern und Bild der linearen Abbildung $h = f\,|_{\ker g \circ f} \to V$.

Aufgabe 58. Von einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ sei bekannt, daß

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

(a) Welche Kombinationen $f(v_i) = w_j$ sind möglich, wenn

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}?$$

(b) Welche Werte für $\dim \ker f$ sind möglich?

Aufgabe 59. Berechne alle möglichen paarweisen Produkte der folgenden Matrizen (auch mit sich selbst):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$