Aufgabe 60. Zeige, daß die unteren Dreiecksmatrizen eine Teilalgebra der $n \times n$-Matrizen bilden; d.h., daß Linearkombinationen und Produkte von unteren Dreiecksmatrizen wieder untere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 61. Bestimme die Matrix S_α der linearen Abbildung, die die Vektoren des $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $\{t \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ spiegelt. Berechne die Matrix $S_\alpha \cdot S_\beta$ und interpretiere die entsprechende lineare Abbildung geometrisch.

Aufgabe 62. Sei V ein Vektorraum $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Wir bezeichnen mit F^k die k-fache Hintereinanderausführung $\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k\times}$. Sei $v \in V$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $F^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $F^n(v) = 0$. Zeige, daß $\{v, F(v), F^2(v), \dots, F^{n-1}(v)\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 63. Sei $(v_1, v_2, \dots, v_k) \in \mathbb{R}^n$ eine Familie von gegebenen Vektoren. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $\mathbb{K}^{m\times n}$?

(a) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid v_i \in \ker f_A \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$.
(b) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) = \ker f_A\}$.
(c) $\{A \in \mathbb{K}^{m\times n} \mid \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, v_k\}) \subseteq \ker f_A\}$.
(d) Berechne die Mengen (a), (b), (c) für die Werte $k = 2$, $m = 2$, $n = 3$ und die Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, -1, 1)$.