Aufgabe 12. Sei

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* einer reellen oder komplexen $n \times n$-Matrix A. Zeige:

(a) $\mathrm{Tr} : \mathbb{K}_{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear und für $A \in \mathbb{K}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m\times n}$ gilt $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, aber im Allgemeinen *nicht* $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$.

(b) Für $n \times n$-Matrizen A, B mit B invertierbar gilt $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$.

(c) Zeige, daß es keine Matrizen A und B gibt, sodaß $AB - BA = I$.

(d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeige daß $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^t A)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf dem Raum der Matrizen definiert.

Aufgabe 13. Wir betrachten den Raum der Matrizen $\mathbb{R}_{n\times n}$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 12d. Sei $S = \{A \in \mathbb{R}_{n\times n} : A = A^t\}$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Bestimme $S^\perp$, d.h., den Unterraum $\{B \in \mathbb{R}_{n\times n} : \mathrm{Tr}(AB) = 0\ \forall A \in S\}$.

Aufgabe 14. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $f : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ Bestimme die zu f adjungierte Abbildung bezüglich des inneren Produkts $\langle u, v\rangle = u^t M v$ wobei $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 15. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einem positiv definiten inneren Produkt. Zeige, daß es zu jedem linearen Funktional (=lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$) genau ein $w \in V$ gibt sodaß

$$f(v) = \langle v, w\rangle$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 16. Gegeben seien die Daten $\vec{x} = (-2, -1, 1, 2)$ und $y = (1, 1, -1, 1)$. Bestimme die Koeffizienten α, β, γ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta + \gamma x \end{aligned}$$

so, daß der Wert

$$\sum_{i=1}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Begründe, daß die Koeffizienten durch die Minimalbedingung eindeutig bestimmt sind.