Aufgabe 17. (a) Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 10 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

auf drei verschiedene Arten.

(b) Berechne die Komplementärmatrix.

Aufgabe 18. Seien $A \in \mathbb{K}_{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m\times n}$, $D \in \mathbb{K}_{n\times n}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Hinweise

1. Betrachte zunächst den Fall, daß A oder D singulär ist.
2. Betrachte dann den Fall $B = 0$, $D = I$.
3. Multipliziere mit geeigneten Matrizen von links und rechts und benutze die Multikplikativität der Determinante.

Aufgabe 19. Berechne die Determinanten

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} * & * & * & a_n \\ * & * & \iddots & 0 \\ * & a_2 & 0 & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} * & * & a & b \\ * & * & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 20. Die Zahlen 46189, 32604, 2717, 40755, 48906 sind durch 19 teilbar. Zeige, daß auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

durch 19 teilbar ist, *ohne* die Determinante explizit auszurechnen.

Aufgabe 21. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeige (z.B. durch Induktion und geeignete Zeilenoperationen), daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$