Aufgabe 22. Zeige durch Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinantenidentität

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

Aufgabe 23. Seien $A, B, C, D \in \mathbb{K}_{n\times n}$ Matrizen, wovon A invertierbar sei.

(a) Zeige, daß die $2n \times 2n$-Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist genau dann, wenn $D - CA^{-1}B$ invertierbar ist.

(b) Zeige, daß

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Zusatzaufgabe: Wie sieht die Inverse M^{-1} als Blockmatrix aus?

Aufgabe 24. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeige, daß $\operatorname{rang}(A)$ identisch ist mit der größten Zahl $k \in \{1, 2, \ldots, \min(m, n)\}$, für die eine nicht verschwindende Unterdeterminante der Ordnung k existiert, d.h., Indexmengen $\{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ und $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$, sodaß

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

existiert

Aufgabe 25. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -7\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 15\,x_3 & = & 0 \\ 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & - & 4\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 26. Bestimme mit möglichst wenig Aufwand die Koeffizienten von x^3 und x^4 in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 2\,x & x & 2 & 3\,x \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5\,x \end{vmatrix}$$