Aufgabe 27. Zeige, daß $\mathbb{R}^3$ mit dem äußeren Produkt $a \times b$ eine nichtassoziative Algebra bildet und für beliebige Vektoren a, b, c die Identitäten
(a) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$
(b) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$
erfüllt sind.

Aufgabe 28. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}[x]$ die $\mathbb{K}$-Algebra der Polynome. Die *Ableitung* eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ist definiert als

$$p'(x) := a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$.
(a) Zeige, daß für jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ gilt

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(x) & p'(x) \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}$$

(b) Zeige unter Verwendung von (a) daß für beliebige Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ die Leibnizregel gilt:

$$(p \cdot q)'(x) = p'(x)\, q(x) + p(x)\, q'(x)$$

Aufgabe 29. Eine Nullstelle ξ eines Polynoms $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ hat Vielfachheit m wenn $p(x) = (x - \xi)^m q(x)$ mit $q(\xi) \neq 0$. Wir betrachten den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit Nullstelle ξ. Zeige, daß die Vielfachheit der Nullstelle ξ gleich m ist genau dann, wenn ξ eine Nullstelle von $p'(x)$ mit Vielfachheit $m - 1$ ist.
Zusatzfrage: Warum stimmt die entsprechende Behauptung in einem endlichen Körper im Allgemeinen nicht?

Aufgabe 30. Seien $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ Polynome mit $q \neq 0$.
(a) Sei $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ mit $\deg r(x) < \deg q(x)$. Zeige, daß λ eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $g(x)$ ist genau dann, wenn λ eine gemeinsame Nullstelle von $g(x)$ und $r(x)$ ist.
(b) Folgere daraus, daß die Nullstellen von $\operatorname{ggT}(f(x), g(x))$ genau die gemeinsamen Nullstellen von $f(x)$ und $g(x)$ sind.
(c) Folgere aus Nr. 29, daß die Mehrfachnullstellen eines Polynoms $f(x)$ genau die Nullstellen von $\operatorname{ggT}(f(x), f'(x))$ sind.
(d) Bestimme (unter Verwendung des Vorhergehenden) die Mehrfachnullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 3\, x^3 + x^2 + 2\, x + 3$$

über $\mathbb{Z}_5$ und die jeweilige Vielfachheit.

Aufgabe 31. Zeige, daß das Polynom $x^2 - 3x + 2 = 0$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt, d.h., daß es unendlich viele $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt mit $A^2 - 3A + 2I = 0$.