Aufgabe 32. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ sowie eine Matrix B, sodaß $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Aufgabe 33. Bestimme die Eigenwerte sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten für die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & -4 \\ -4 & -13 & 4 & 8 \\ -4 & -10 & 3 & 6 \\ -4 & -14 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34. Sei A eine reguläre Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A^{-1} gegeben sind durch

$$\operatorname{spec} A^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

und auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der einzelnen Eigenwerte jeweils übereinstimmen.

Aufgabe 35. Sei V ein Vektorraum, $f, g : V \to V$ Endomorphismen und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(i) Zeige, daß λ genau dann ein Eigenwert von $f \circ g$ ist, wenn λ auch ein Eigenwert von $g \circ f$ ist.

(ii) Wenn $\dim V < \infty$, dann gilt die Äquivalenz auch für $\lambda = 0$.

Aufgabe 36. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\operatorname{rang}(A) = 1$.

(ii) 0 ist ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $n - 1$.

(iii) Es gibt $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x, y \neq 0$, sodaß $A = xy^t$.

Aufgabe 37. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix diagonalisierbar?