Aufgabe 38. Wir bezeichnen mit $J_k(\lambda)$ einen Jordanblock der Länge k zum Eigenwert λ. Sei A die Blockdiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} J_2(2) &&&&& \\ & J_2(2) &&&& \\ && J_3(2) &&& \\ &&& J_5(2) && \\ &&&& J_3(4) & \\ &&&&& J_3(4) \end{pmatrix}$$

Bestimme $\dim\ker(A-2I)^k$ und $\dim\ker(A-4I)^k$ für $0 \leq k \leq 18$.

Aufgabe 39. Sei A eine 19×19-Matrix, von der die folgenden Kerndimensionen bekannt sind:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\ker(A+I)^k$	3	4	5	6	7	7	7
$\ker(A+2I)^k$	3	6	6	6	6	6	6
$\ker(A-I)^k$	1	2	3	4	5	6	6
$\ker(A-2I)^k$	0	0	0	0	0	0	0

Bestimme die Jordansche Normalform von A.

Aufgabe 40. Bestimme die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T sodaß $T^{-1}AT = J$.

Aufgabe 41. Sei $A = J_k(\lambda)$ ein Jordanblock der Länge k und $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Zeige, daß die Matrixeinträge Matrix $p(A)$ gegeben sind durch

$$p(A)_{ij} = \begin{cases} \frac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} & \text{für } j \geq i \\ 0 & \text{für } j < i \end{cases}$$

wobei $p^{(j)}(x)$ die j-te Ableitung bezeichnet.

Aufgabe 42. Zeige, daß das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\chi_A(x) = x^m - a_1 x^{m-1} - a_2 x^{m-2} - \dots - a_{m-1}x - a_m.$$