Aufgabe 49. (a) Sei σ_U die orthogonale Spiegelung an der Ebene

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimme die Matrix von σ_U bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis und bezüglich der Standardbasis.

(b) Sei σ_V die Orthogonalspiegelung an der Ebene

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimme die Matrix der Hintereinanderausführung $\rho = \sigma_V \circ \sigma_U$ bezüglich der Standardbasis und begründe, warum ρ eine Drehung ist. Bestimme Drehachse und Drehwinkel von ρ.

Aufgabe 50. Zeige, daß jede Matrix $U \in SU_2(\mathbb{C}) = \{U : U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ unitär mit $\det U = 1\}$ die Gestalt

$$U = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $z, w \in \mathbb{C}$ und $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Aufgabe 51. Zeige, daß eine obere Dreiecksmatrix R genau dann normal ist, wenn R eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 52. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix und $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte. Zeige, daß es Orthogonalprojektionen $P_1, P_2, \dots, P_m$ gibt, $A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$. Zusatzaufgabe: Wenn zusätzlich angenommen wird, daß $\sum_{i=1}^m P_i = I$, dann ist diese Darstellung eindeutig.

Aufgabe 53. Zeige, daß $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann normal ist, wenn es eine unitäre Matrix U gibt, sodaß $A^* = AU$.

Aufgabe 54. Bestimme alle reellen normalen 2×2-Matrizen. Sind alle symmetrisch oder schiefsymmetrisch?