Aufgabe 60. Wahr oder falsch? Sei A eine selbstadjungierte $n \times n$-Matrix und $\det A_k$ ihre Hauptminoren.

(a) Wenn $\det A_k > 0$ für $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und $\det A \geq 0$, dann ist A positiv semidefinit.
(b) Wenn es ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\det A_k < 0$, dann ist A nicht positiv semidefinit.
(c) Wenn es $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\det A_k > 0$ und $\det A_l < 0$, dann ist A indefinit.

Aufgabe 61. Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & 4+i \\ -4 & 4-i & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 62. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit und $a_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige, daß dann alle Einträge in der i-ten Zeile und Spalte verschwinden.

Aufgabe 63. (a) Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn es Spaltenvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ gibt, sodaß

$$A = \sum_{i=1}^{m} x_i x_i^*$$

(b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Zeige, daß die Matrix

$$A \circ B := (a_{ij} b_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

ebenfalls positiv semidefinit ist. *Hinweis*: Teil (a) kann hilfreich sein.

Aufgabe 64. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zeige, daß der numerische Wertebereich $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ genau die konvexe Hülle der Eigenwerte ist:

$$W(A) = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i : \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\Big\}$$