Aufgabe 65. Zeige, daß für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und beliebige Gewichte $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ alle Eigenwerte von A in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{w_i} \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ w_j\}$$

liegen.

Aufgabe 66. Bestimme die kleinsten Konstanten $C_{pq}(n)$, $p, q \in \{1, 2, \infty\}$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_p \leq C_{pq}(n)\, \|x\|_q\,,$$

wobei

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Aufgabe 67. Seien $(U, \|\ \|_U)$, $(V, \|\ \|_V)$ und $(W, \|\ \|_W)$ normierte Räume und $f : V \to W$, $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeige, daß

$$\|f \circ g\|_{U,W} \leq \|f\|_{V,W}\, \|g\|_{U,V}$$

Aufgabe 68. Zeige, daß für eine normale Matrix A gilt $\operatorname{spec}(A^*A) = \{|\lambda|^2 : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$ und insbesondere $\rho(A) = \|A\|_{2,2}$.

Aufgabe 69. Zeige: Die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} I & B \\ B^* & I \end{pmatrix}$$

ist positiv definit genau dann, wenn $\|B\|_{2,2} < 1$ ist.