Aufgabe 1. Welche der folgenden Abbildungen sind Sesquilinearformen oder Bilinearformen? Welche davon sind Skalarprodukte?
(a) $B_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$
(b) $B_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x\overline{y} + 1$
(c) $B_3 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \overline{xy}$
(d) $B_4 : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto (p \cdot q)'(0)$ (Ableitung).

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2.
(a) Zeige, daß durch

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_2$ definiert wird.
(b) Berechne die Grammatrix $(a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ wobei $a_{ij} = \langle x^i, x^j\rangle$.

Aufgabe 3. Zeige, daß für beliebiges fixiertes $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$B_N(x, y) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i y_j}{i + j + N}$$

eine positiv definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ darstellt.
Hinweis: Um Positivität zu zeigen, vgl. mit Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Ist

$$\begin{aligned} \max : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \max(|x_1|, |x_2|) \end{aligned}$$

eine Norm? Gibt es ein inneres Produkt auf $\mathbb{C}^2$, sodaß max die davon induzierte Norm ist?

Aufgabe 5. Bestimme mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis der linearen Hülle

$$\mathcal{L}(\{(1, 0, 2, 0, 0), (1, 1, 2, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 3, 2, 3)\})$$

im $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 6. Bestimme eine Orthonormalbasis des Raumes V aus Aufgabe 2.

Aufgabe 7. Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle x, y \rangle = x^t A y$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die kanonische Basis. Es darf vorausgesetzt werden, daß das Skalarprodukt positiv definit ist.

Aufgabe 8. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt und $P_U : V \to U$ die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum U.
Zeige, daß für alle $x \in V$ gilt:

$$\|x - P_U(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in U\}$$

Hinweis. Stelle x, $P_U(x)$ und y mit Hilfe einer Orthonormalbasis von U dar.

Aufgabe 9. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^4$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Bestimme die Matrixdarstellung (bezüglich der Standardbasis) der Orthogonalprojektion P auf den von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraum U.

Aufgabe 10. Sei V ein Vektorraum mit positiv definitem Skalarprodukt. Beweise die folgenden Aussagen:
(a) $A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$.
(b) $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
(c) $A^\perp = ((A^\perp)^\perp)^\perp$

Aufgabe 11. Gegeben sei die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 8 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimme die Faktorisierung von σ in ein Produkt durchschnittsfremder Zyklen.
(b) Zerlege σ in ein Produkt von Transpositionen

$$\sigma = \tau_{k_r l_r} \tau_{k_{r-1} l_{r-1}} \cdots \tau_{k_1 l_1}$$

mit $2 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$ und $l_i < k_i$.
(c) Bestimme die Fehlstände von σ sowie $\operatorname{sign} \sigma$.
(d) Bestimme die Permutation σ^{-1} und deren Faktorisierungen in ein Produkt von Transpositionen und Zyklen.
(e) Bestimme die Hintereinanderausführung σ^2 von σ mit sich selbst und davon die Zyklenfaktorisierung.

Aufgabe 12. Sei

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* einer reellen oder komplexen $n \times n$-Matrix A. Zeige:

(a) $\mathrm{Tr} : \mathbb{K}_{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear und für $A \in \mathbb{K}_{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m\times n}$ gilt $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, aber im Allgemeinen *nicht* $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$.

(b) Für $n \times n$-Matrizen A, B mit B invertierbar gilt $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$.

(c) Zeige, daß es keine Matrizen A und B gibt, sodaß $AB - BA = I$.

(d) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeige daß $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^tA)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf dem Raum der Matrizen definiert.

Aufgabe 13. Wir betrachten den Raum der Matrizen $\mathbb{R}_{n\times n}$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 12d. Sei $S = \{A \in \mathbb{R}_{n\times n} : A = A^t\}$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Bestimme $S^\perp$, d.h., den Unterraum $\{B \in \mathbb{R}_{n\times n} : \mathrm{Tr}(AB) = 0\ \forall A \in S\}$.

Aufgabe 14. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $f : V \to V$ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ Bestimme die zu f adjungierte Abbildung bezüglich des inneren Produkts $\langle u, v\rangle = u^tMv$ wobei $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 15. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einem positiv definiten inneren Produkt. Zeige, daß es zu jedem linearen Funktional (=lineare Abbildung $f : V \to \mathbb{K}$) genau ein $w \in V$ gibt sodaß

$$f(v) = \langle v, w\rangle$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 16. Gegeben seien die Daten $\vec{x} = (-2, -1, 1, 2)$ und $y = (1, 1, -1, 1)$. Bestimme die Koeffizienten α, β, γ der Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\alpha}{x} + \beta + \gamma x \end{aligned}$$

so, daß der Wert

$$\sum_{i=1}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Begründe, daß die Koeffizienten durch die Minimalbedingung eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 17. (a) Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 10 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

auf drei verschiedene Arten.

(b) Berechne die Komplementärmatrix.

Aufgabe 18. Seien $A \in \mathbb{K}_{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m\times n}$, $D \in \mathbb{K}_{n\times n}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$$

Hinweise

1. Betrachte zunächst den Fall, daß A oder D singulär ist.
2. Betrachte dann den Fall $B = 0$, $D = I$.
3. Multipliziere mit geeigneten Matrizen von links und rechts und benutze die Multikplikativität der Determinante.

Aufgabe 19. Berechne die Determinanten

$$\text{(a)} \quad \begin{vmatrix} * & * & * & a_n \\ * & * & \iddots & 0 \\ * & a_2 & 0 & \vdots \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{vmatrix} * & * & a & b \\ * & * & c & d \\ e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 20. Die Zahlen 46189, 32604, 2717, 40755, 48906 sind durch 19 teilbar. Zeige, daß auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

durch 19 teilbar ist, *ohne* die Determinante explizit auszurechnen.

Aufgabe 21. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeige (z.B. durch Induktion und geeignete Zeilenoperationen), daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

Aufgabe 22. Zeige durch Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinantenidentität

$$\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$$

Aufgabe 23. Seien $A, B, C, D \in \mathbb{K}_{n\times n}$ Matrizen, wovon A invertierbar sei.

(a) Zeige, daß die $2n \times 2n$-Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar ist genau dann, wenn $D - CA^{-1}B$ invertierbar ist.

(b) Zeige, daß

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$$

Zusatzaufgabe: Wie sieht die Inverse M^{-1} als Blockmatrix aus?

Aufgabe 24. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeige, daß $\operatorname{rang}(A)$ identisch ist mit der größten Zahl $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$, für die eine nicht verschwindende Unterdeterminante der Ordnung k existiert, d.h., Indexmengen $\{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ und $\{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$, sodaß

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix} \neq 0$$

existiert

Aufgabe 25. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} -7\,x_1 & - & 4\,x_2 & + & 15\,x_3 & = & 0 \\ 4\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 9\,x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & x_2 & - & 4\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 26. Bestimme mit möglichst wenig Aufwand die Koeffizienten von x^3 und x^4 in der Determinante

$$\begin{vmatrix} 2\,x & x & 2 & 3\,x \\ 1 & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5\,x \end{vmatrix}$$

Aufgabe 27. Zeige, daß $\mathbb{R}^3$ mit dem äußeren Produkt $a \times b$ eine nichtassoziative Algebra bildet und für beliebige Vektoren a, b, c die Identitäten
(a) $a \times (b \times c) = \langle a, c\rangle\, b - \langle a, b\rangle\, c$
(b) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$
erfüllt sind.

Aufgabe 28. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}[x]$ die $\mathbb{K}$-Algebra der Polynome. Die *Ableitung* eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ ist definiert als

$$p'(x) := a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$.
(a) Zeige, daß für jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ gilt

$$p(A) = \begin{pmatrix} p(x) & p'(x) \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}$$

(b) Zeige unter Verwendung von (a) daß für beliebige Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ die Leibnizregel gilt:

$$(p \cdot q)'(x) = p'(x)\, q(x) + p(x)\, q'(x)$$

Aufgabe 29. Eine Nullstelle ξ eines Polynoms $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ hat Vielfachheit m wenn $p(x) = (x - \xi)^m q(x)$ mit $q(\xi) \neq 0$. Wir betrachten den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit Nullstelle ξ. Zeige, daß die Vielfachheit der Nullstelle ξ gleich m ist genau dann, wenn ξ eine Nullstelle von $p'(x)$ mit Vielfachheit $m - 1$ ist.
Zusatzfrage: Warum stimmt die entsprechende Behauptung in einem endlichen Körper im Allgemeinen nicht?

Aufgabe 30. Seien $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ Polynome mit $q \neq 0$.
(a) Sei $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ mit $\deg r(x) < \deg q(x)$. Zeige, daß λ eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $g(x)$ ist genau dann, wenn λ eine gemeinsame Nullstelle von $g(x)$ und $r(x)$ ist.
(b) Folgere daraus, daß die Nullstellen von $\operatorname{ggT}(f(x), g(x))$ genau die gemeinsamen Nullstellen von $f(x)$ und $g(x)$ sind.
(c) Folgere aus Nr. 29, daß die Mehrfachnullstellen eines Polynoms $f(x)$ genau die Nullstellen von $\operatorname{ggT}(f(x), f'(x))$ sind.
(d) Bestimme (unter Verwendung des Vorhergehenden) die Mehrfachnullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^4 + 3\, x^3 + x^2 + 2\, x + 3$$

über $\mathbb{Z}_5$ und die jeweilige Vielfachheit.

Aufgabe 31. Zeige, daß das Polynom $x^2 - 3x + 2 = 0$ unendlich viele Nullstellen in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ besitzt, d.h., daß es unendlich viele $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gibt mit $A^2 - 3A + 2I = 0$.

Aufgabe 32. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ sowie eine Matrix B, sodaß $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Aufgabe 33. Bestimme die Eigenwerte sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten für die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 & -4 \\ -4 & -13 & 4 & 8 \\ -4 & -10 & 3 & 6 \\ -4 & -14 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 34. Sei A eine reguläre Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A^{-1} gegeben sind durch

$$\operatorname{spec} A^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

und auch die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der einzelnen Eigenwerte jeweils übereinstimmen.

Aufgabe 35. Sei V ein Vektorraum, $f, g : V \to V$ Endomorphismen und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

(i) Zeige, daß λ genau dann ein Eigenwert von $f \circ g$ ist, wenn λ auch ein Eigenwert von $g \circ f$ ist.

(ii) Wenn $\dim V < \infty$, dann gilt die Äquivalenz auch für $\lambda = 0$.

Aufgabe 36. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\operatorname{rang}(A) = 1$.

(ii) 0 ist ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $n - 1$.

(iii) Es gibt $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x, y \neq 0$, sodaß $A = xy^t$.

Aufgabe 37. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der reellen $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist die Matrix diagonalisierbar?

Aufgabe 38. Wir bezeichnen mit $J_k(\lambda)$ einen Jordanblock der Länge k zum Eigenwert λ. Sei A die Blockdiagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} J_2(2) &&&&& \\ & J_2(2) &&&& \\ && J_3(2) &&& \\ &&& J_5(2) && \\ &&&& J_3(4) & \\ &&&&& J_3(4) \end{pmatrix}$$

Bestimme $\dim\ker(A-2I)^k$ und $\dim\ker(A-4I)^k$ für $0 \leq k \leq 18$.

Aufgabe 39. Sei A eine 19×19-Matrix, von der die folgenden Kerndimensionen bekannt sind:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\ker(A+I)^k$	3	4	5	6	7	7	7
$\ker(A+2I)^k$	3	6	6	6	6	6	6
$\ker(A-I)^k$	1	2	3	4	5	6	6
$\ker(A-2I)^k$	0	0	0	0	0	0	0

Bestimme die Jordansche Normalform von A.

Aufgabe 40. Bestimme die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T sodaß $T^{-1}AT = J$.

Aufgabe 41. Sei $A = J_k(\lambda)$ ein Jordanblock der Länge k und $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Zeige, daß die Matrixeinträge Matrix $p(A)$ gegeben sind durch

$$p(A)_{ij} = \begin{cases} \frac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!} & \text{für } j \geq i \\ 0 & \text{für } j < i \end{cases}$$

wobei $p^{(j)}(x)$ die j-te Ableitung bezeichnet.

Aufgabe 42. Zeige, daß das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\chi_A(x) = x^m - a_1 x^{m-1} - a_2 x^{m-2} - \dots - a_{m-1}x - a_m.$$

Aufgabe 43. Berechne eine explizite Formel für die Folge a_n, die gegeben ist durch $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$ und

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 2$$

Aufgabe 44. Berechne e^{At} für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 45. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeige, daß

$$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A}$$

Hinweis: Jordansche Normalform

Aufgabe 46. Bestimme alle 7×7-Matrizen, deren Minimalpolynom gegeben ist durch

$$m_A(x) = (x-1)^3(x-2)^2$$

.

Aufgabe 47. Berechne $\exp(At)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ohne die Eigenwerte zu bestimmen (d.h., unter Verwendung des Minimalpolynoms).

Aufgabe 48. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeige, daß es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ gibt, sodaß $A^{-1} = p(A)$.

Aufgabe 49. (a) Sei σ_U die orthogonale Spiegelung an der Ebene

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimme die Matrix von σ_U bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis und bezüglich der Standardbasis.

(b) Sei σ_V die Orthogonalspiegelung an der Ebene

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimme die Matrix der Hintereinanderausführung $\rho = \sigma_V \circ \sigma_U$ bezüglich der Standardbasis und begründe, warum ρ eine Drehung ist. Bestimme Drehachse und Drehwinkel von ρ.

Aufgabe 50. Zeige, daß jede Matrix $U \in SU_2(\mathbb{C}) = \{U : U \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ unitär mit } \det U = 1\}$ die Gestalt

$$U = \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $z, w \in \mathbb{C}$ und $|z|^2 + |w|^2 = 1$.

Aufgabe 51. Zeige, daß eine obere Dreiecksmatrix R genau dann normal ist, wenn R eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 52. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte. Zeige, daß es Orthogonalprojektionen $P_1, P_2, \ldots, P_m$ gibt, $A = \sum_{i=1}^m \lambda_i P_i$. Zusatzaufgabe: Wenn zusätzlich angenommen wird, daß $\sum_{i=1}^m P_i = I$, dann ist diese Darstellung eindeutig.

Aufgabe 53. Zeige, daß $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann normal ist, wenn es eine unitäre Matrix U gibt, sodaß $A^* = AU$.

Aufgabe 54. Bestimme alle reellen normalen 2×2-Matrizen. Sind alle symmetrisch oder schiefsymmetrisch?

Aufgabe 55. Berechne eine unitäre Matrix U, die die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -4\,i & 2\,i \\ 4\,i & -1 & 2 \\ -2\,i & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisiert sowie die zugehörigen Projektionen aus Aufgabe 52.

Aufgabe 56. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine selbstadjungierte Matrix. Zeige, daß die Matrix e^{iA} unitär ist.

Aufgabe 57. Gegeben sei die Quadrik

$$-2\,x^2 + 72\,xy - 23\,y^2 + 118\,y - 76\,x - 102 = 0.$$

Bestimme den Mittelpunkt und eine Drehung, die die Quadrik in Diagonalform überführt, und skizziere die Lage der ursprünglichen Quadrik.

Aufgabe 58. Sei K der Drehkegel im $\mathbb{R}^3$, der durch Rotation der Geraden $y = 2x$ um die x-Achse entsteht. Bestimme den Typ des Kegelschnitts, der durch Schnitt dieses Kegels mit der Ebene $x + y + z = 3$ entsteht.
Hinweis: Ebene mit einer Orthogonalbasis parametrisieren.

Aufgabe 59. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinit. Zeige, daß es eine eindeutige positiv semidefinite Matrix B gibt, sodaß $B^2 = A$.

Aufgabe 60. Wahr oder falsch? Sei A eine selbstadjungierte $n \times n$-Matrix und $\det A_k$ ihre Hauptminoren.

(a) Wenn $\det A_k > 0$ für $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ und $\det A \geq 0$, dann ist A positiv semidefinit.
(b) Wenn es ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\det A_k < 0$, dann ist A nicht positiv semidefinit.
(c) Wenn es $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $\det A_k > 0$ und $\det A_l < 0$, dann ist A indefinit.

Aufgabe 61. Bestimme die Choleskyzerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -4 \\ -4 & 5 & 4+i \\ -4 & 4-i & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 62. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ positiv semidefinit und $a_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zeige, daß dann alle Einträge in der i-ten Zeile und Spalte verschwinden.

Aufgabe 63. (a) Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn es Spaltenvektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ gibt, sodaß

$$A = \sum_{i=1}^{m} x_i x_i^*$$

(b) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ positiv semidefinit. Zeige, daß die Matrix

$$A \circ B := (a_{ij} b_{ij})_{i,j=1}^{n}$$

ebenfalls positiv semidefinit ist. *Hinweis*: Teil (a) kann hilfreich sein.

Aufgabe 64. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ normal mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zeige, daß der numerische Wertebereich $W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ genau die konvexe Hülle der Eigenwerte ist:

$$W(A) = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i : \alpha_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \Big\}$$

Aufgabe 65. Zeige, daß für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und beliebige Gewichte $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ alle Eigenwerte von A in der Vereinigung der Kreisscheiben

$$S_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{w_i} \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\ w_j\}$$

liegen.

Aufgabe 66. Bestimme die kleinsten Konstanten $C_{pq}(n)$, $p, q \in \{1, 2, \infty\}$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_p \leq C_{pq}(n)\, \|x\|_q\, ,$$

wobei

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Aufgabe 67. Seien $(U, \|\ \|_U)$, $(V, \|\ \|_V)$ und $(W, \|\ \|_W)$ normierte Räume und $f : V \to W$, $g : U \to V$ lineare Abbildungen. Zeige, daß

$$\|f \circ g\|_{U,W} \leq \|f\|_{V,W}\, \|g\|_{U,V}$$

Aufgabe 68. Zeige, daß für eine normale Matrix A gilt $\operatorname{spec}(A^*A) = \{|\lambda|^2 : \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$ und insbesondere $\rho(A) = \|A\|_{2,2}$.

Aufgabe 69. Zeige: Die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} I & B \\ B^* & I \end{pmatrix}$$

ist positiv definit genau dann, wenn $\|B\|_{2,2} < 1$ ist.