Aufgabe 1

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bezüglich des inneren Produkts

$$\langle x, y \rangle = x^T A y,$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sie dürfen ohne Beweis voraussetzen, dass das innere Produkt positiv definit ist.

Aufgabe 2

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit positiv definitem inneren Produkt und sei $P_U : V \rightarrow U$ die Orthogonalprojektion auf einen Unterraum U von V . Zeigen Sie, dass für alle $x \in V$ gilt:

$$\|x - P_U(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in U\}$$

Hinweis: Starten Sie mit einer Orthonormalbasis von U .

Aufgabe 3

Gegeben sei die Abbildung

$$\max : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|).$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\max$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ beschreibt.
- (b) Bestimmen Sie ein inneres Produkt auf $\mathbb{C}^n$, sodass $\max$ die davon induzierte Norm ist oder beweisen Sie, dass kein solches inneres Produkt existiert.

Aufgabe 4

Gegeben sei der Vektorraum $\mathbb{R}_4$ mit dem Standardskalarprodukt. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung (bezüglich Standardbasis) der Orthogonalprojektion $P : V \rightarrow U$ auf den von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Unterraum U .

Aufgabe 5

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit innerem Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V . Weiters sei $v^* \in V^*$ ein Element des Dualraums V^* von V und $v_0 \in V$ gegeben durch $v_0 = v^*(v_1)v_1 + v^*(v_2)v_2 + \dots + v^*(v_n)v_n$. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $v \in V$ gilt $v^*(v) = \langle v_0, v \rangle$.
- (b) Für je zwei Vektoren $u, w \in V$ gilt:

$$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle \text{ für alle } v \in V \iff u = w$$