Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 02 – 11.03.2020

Aufgabe 6
Sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $i, \pi(i), \pi^2(i), \dots$ periodisch ist und dass i die erste Zahl ist, die doppelt auftritt.

(b) Die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$, wobei $k > 0$ der kleinste Exponent ist, sodass $\pi^k(i) = i$, heißt Zyklus von i. Zeigen Sie, dass die Relation $i \sim j :\Leftrightarrow j$ liegt im Zyklus von i eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, \dots, n\}$ definiert.

Aufgabe 7
Eine Permutation π heißt zyklisch, wenn Sie genau einen nichttrivialen (Länge ≥ 2) Zyklus $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ enthält. Übliche Schreibweise $\pi = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$.

(a) Zeigen Sie, dass zwei zyklische Permutationen $\pi = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ und $\rho = (j_1\ j_2\ \dots\ j_l)$ kommutieren, wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$

(b) Folgern Sie, dass sich jede Permutation als Produkt von zyklischen Permutationen schreiben lässt.

(c) Zerlegen Sie die zyklische Permutation $\pi = (i_1\ i_2\ \dots\ i_k)$ in ein Produkt von Transpositionen und bestimmen Sie $\operatorname{sign}(\pi)$.

Aufgabe 8
Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie π^k für $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle Fehlstände von π und berechnen Sie $\operatorname{sign}(\pi)$.

(c) Zerlegen Sie π in ein Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 9
Das Kreuzprodukt zweier Vektoren a, b des $\mathbb{R}_3$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) $a \times b$ ist orthogonal zu a und b.

(b) $\|a \times b\|^2 + \langle a, b\rangle^2 = \|a\|^2\|b\|^2$

Folgern Sie daraus, dass $\|a \times b\|$ gleich der Fläche des von den Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms ist.

Aufgabe 10
Zeigen Sie:

(a) $\Delta : (\mathbb{R}_3)^3 \to \mathbb{R},\ (a, b, c) \mapsto \langle a \times b, c\rangle$ ist eine Determinantenform.

(b) Für je drei Vektoren a, b, c des R_3 gilt $\langle a \times b, c\rangle = \langle a, b \times c\rangle$