

Aufgabe 11

Sei

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

die *Spur* (engl. Trace) einer $n \times n$ -Matrix A über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie:

- (a) $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ ist linear.
- (b) Für alle Matrizen $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
- (c) Für drei Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt im Allgemeinen nicht $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(ACB)$.
- (d) Für alle Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt $AB - BA \neq I_n$ und $\operatorname{Tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{Tr}(A)$.
- (e) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dann ist durch $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^T A)$ ein positiv definites inneres Produkt auf dem Raum der $n \times n$ -Matrizen definiert.

Aufgabe 12Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D).$$

Folgende Vorgehensweise wird empfohlen:

- i) Betrachten Sie zuerst den Fall, dass A oder D singulär ist.
- ii) Betrachten Sie danach den Fall, dass $B = 0$ und $D = I_n$.
- iii) Multiplizieren Sie im letzten Schritt mit geeigneten Matrizen von links und rechts und benutzen Sie die Multiplikativität der Determinante.

Aufgabe 13

Die Zahlen 46189, 32604, 2717, 40755 und 48906 sind durch 19 teilbar. Zeigen Sie, dass auch die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 7 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

durch 19 teilbar ist, *ohne* den Wert der Determinante explizit zu bestimmen.**Aufgabe 14**

- (a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$.

- (b) Zeigen Sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen die Identität

$$\det \begin{pmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie,

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$