

Aufgabe 16

Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & -3 \\ 10 & 8 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

auf drei verschiedene Arten, bestimmen Sie ihre Komplementärmatrix $\hat{A}$ und überprüfen Sie ihr Ergebnis mit Hilfe der Identität $A\hat{A} = \det(A)I$.

Aufgabe 17

(a) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ k & k & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

regulär ist.

(b) Lösen Sie folgendes Gleichungssystem für den Fall, dass A regulär ist, mit der Cramerschen Regel:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 18

Zeigen Sie, dass der Vektorraum $\mathbb{R}_3$ mit dem Kreuzprodukt eine nichtassoziative Algebra bildet und für beliebige Vektoren a, b, c die folgenden Identitäten erfüllt sind:

- (a) $a \times (b \times c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$
- (b) $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$

Jedes formale Polynom $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ entspricht einer Polynomfunktion, die ein Element $x \in \mathbb{K}$ auf den Wert $p(x) \in \mathbb{K}$ abbildet. Ähnlich dazu können Polynomfunktionen auf $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ (oder auch $\mathbb{K}[x]$) angewandt werden:

$$p(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_nA^n.$$

Aufgabe 19

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}[x]$ die $\mathbb{K}$ -Algebra der Polynome. Die *Ableitung* eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ist definiert als

$$p'(x) := a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}.$$

(a) Zeigen Sie für jedes Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$:

$$p \left(\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} p(x) & p'(x) \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass für beliebige Polynome $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ die Leibnizregel gilt:

$$(p \cdot q)'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

Aufgabe 20

Zeigen Sie, dass das Polynom $x^2 - 3x + 2$ unendlich viele Nullstelle in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ besitzt, d.h., dass es unendlich viele $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt mit $A^2 - 3A + 2I = 0$.