Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 05 – 01.04.2020

Aufgabe 21

(a) Sei
$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und $r = z/d$ eine rationale Nullstelle von p, das heißt, $a_0, \dots, a_n, z, d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(d, z) = 1$. Zeigen Sie, dass z ein Teiler von a_0 und d ein Teiler von a_n ist.

(b) Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms
$$p(x) = x^5 - 11x^4 - 6x^3 + 59x^2 + 71x + 66.$$

(c) Sei $p(x)$ wie in (b) und
$$q(x) = x^3 + 6x^2 - 13x - 42.$$
Bestimmen Sie Polynome $s(x)$ und $r(x)$, sodass $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ und $r(x) = 0$ oder $\deg r(x) < \deg q(x)$.

Aufgabe 22

Sei $p'(x)$ die Ableitung eines Polynoms $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $p(x)$ ist genau dann gleich $m > 0$, wenn die Vielfachheit von λ als Nullstelle von $p'(x)$ gleich $m - 1$ ist.

(b) Zeigen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels, dass die Aussage in (a) für $p(x) \in \mathbb{Z}_n[x]$ und $\lambda \in \mathbb{Z}_n$ nicht gilt.

Aufgabe 23

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$ Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$.

(a) Sei $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ für zwei Polynome $q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $g(x)$ ist, wenn λ eine gemeinsame Nullstelle von $g(x)$ und $r(x)$ ist.

(b) Folgern Sie aus Aufgabe 22, dass die Nullstellen von $p(x)$ mit Vielfachheit $m > 1$ genau die gemeinsamen Nullstellen von von $p(x)$ und $p'(x)$ sind.

(c) Bestimmen Sie unter Verwendung der Unterpunkte (a) und (b) die Mehrfachnullstellen des Polynoms
$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 3$$
über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_5$ und deren jeweilige Vielfachheit.

Aufgabe 24

Sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, $f, g : V \to V$ zwei lineare Abbildungen und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

(a) λ ist genau dann ein Eigenwert von $f \circ g$, wenn λ ein Eigenwert von $g \circ f$ ist.

(b) Falls $\dim V < \infty$ gilt (a) auch wenn $\lambda = 0$.

Aufgabe 25

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} = \{(a_0, a_1, \dots) \mid a_0, a_1, \dots \in \mathbb{K}\}$ der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{K}$. Weiters sei f die Linksverschiebung und g die Rechtsverschiebung einer Folge, das heißt
$$f, g : \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}, \quad f((a_0, a_1, \dots)) = (a_1, a_2, \dots) \quad \text{und} \quad g((a_0, a_1, \dots)) = (0, a_0, a_1, \dots).$$
Bestimmen Sie die Spektren von f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$.