Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 06 – 22.04.2020

Aufgabe 26
Bestimmen Sie die Eigenwerte und ihre zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} -6 & 9 & 4 & -1 \\ -9 & 12 & 5 & -1 \\ 12 & -15 & -6 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie, wenn möglich, eine Matrix B, sodass $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Aufgabe 27
Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix. Zeigen Sie:

(a) Wenn A regulär ist, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} gegeben durch

$$\operatorname{spec}(A^{-1}) = \{1/\lambda \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}$$

und die jeweils zugehörigen Eigenräume stimmen überein, d.h. es gilt $\mathcal{N}_\lambda(A) = \mathcal{N}_{1/\lambda}(A^{-1})$. (Hier bezeichnet $\mathcal{N}_\lambda(A)$ den Eigenraum der Matrix A zum Eigenwert λ.)

(b) Wenn $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom ist, sodass $p(A) = 0$ gilt, dann erfüllen alle Eigenwerte $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$ die Gleichung $p(\lambda) = 0$.

Aufgabe 28
Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $\operatorname{rang}(A) = 1$.

(ii) 0 ist ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit $n-1$.

(iii) Es gibt $x, y \in \mathbb{K}_n \setminus \{0\}$, sodass $A = xy^T$.

Aufgabe 29
Die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei gegeben durch die Startwerte $a_0 = a_1 = 2, a_2 = 4$ und

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} - 2a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Bestimmen Sie eine explizite Formel für a_n, die nur von n abhängt.

Aufgabe 30
Finden Sie die Eigenwerte und Eigenräume der reellen $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, ob diese Matrix diagonalisierbar ist.