Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 07 – 29.04.2020

Aufgabe 31

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit nicht unbedingt verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zeigen Sie, dass Matrizen $M_1, M_2, \ldots, M_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit den Eigenschaften

i) M_i ist idempotent, d.h. $M_i^2 = M_i$

ii) $M_i M_j = 0$ für $i \neq j$

iii) $\operatorname{rang}(M_i) = 1$

existieren, sodass

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i\,.$$

Zeigen Sie außerdem, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k M_i$.

Aufgabe 32

(a) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist durch

$$\chi_A(x) = (-1)^n(x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \ldots - a_1 x - a_0)\,.$$

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und eine Basis aus Eigenvektoren für die $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 33

Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T, sodass $T^{-1}AT = J$ gilt.

Aufgabe 34

Wir bezeichnen mit $J_k(\lambda)$ einen Jordanblock der Länge k zum Eigenwert λ. Sei A die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} J_2(2) & & & & & \\ & J_2(2) & & & & \\ & & J_3(2) & & & \\ & & & J_5(2) & & \\ & & & & J_3(4) & \\ & & & & & J_3(4) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\dim(\ker(A - \lambda I)^k)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 35

Sei $A \in \mathbb{C}^{20\times 20}$ eine Matrix, von der die folgenden Kerndimensionen bekannt sind:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\ker(A-2I)^k$	1	2	3	4	5	6	6
$\ker(A-I)^k$	0	0	0	0	0	0	0
$\ker A^k$	3	4	5	6	7	7	7
$\ker(A+I)^k$	3	6	6	6	6	6	6
$\ker(A+2I)^k$	0	1	1	1	1	1	1

(a) Eine Zahl in der Tabelle ist falsch. Finden und korrigieren Sie diese Zahl.

(b) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform von A.