Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 08 – 06.05.2020

Aufgabe 36
Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{L}(V, V)$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \{0\} &\subseteq \ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \dots \\ V &\supseteq \operatorname{im}(f) \ \supseteq \operatorname{im}(f^2) \ \subseteq \dots \end{aligned}$$

(b) Es existiert ein $m \leq n$, sodass $\operatorname{im}(f^m) = \operatorname{im}(f^{m+1})$.

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) $\ker(f^m) = \ker(f^{m+1})$
(ii) $\operatorname{im}(f^m) = \operatorname{im}(f^{m+1})$
(iii) $\ker(f^m) = \ker(f^{m+k})\ \forall k \in \mathbb{N}$
(iv) $\operatorname{im}(f^m) = \operatorname{im}(f^{m+k})\ \forall k \in \mathbb{N}$

Aufgabe 37
Zeigen Sie, dass die Aussagen aus 36 (c) äquivalent sind zu den folgenden beiden Aussagen:

(v) $\ker(f^m) \cap \operatorname{im}(f^m) = \{0\}$
(vi) $V = \ker(f^m) \oplus \operatorname{im}(f^m)$

Aufgabe 38
Bestimmen Sie eine explizite Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die gegeben ist durch $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ und die inhomogene Rekursion

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} + 1.$$

Hinweis: Definieren Sie zuerst $b_0 = a_0$ und $b_n = a_n - a_{n-1}$ und setzen Sie in die Rekursion ein, um eine homogene Rekursion für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu erhalten.

Aufgabe 39
Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sowie eine Transformationsmatrix T, sodass $T^{-1}AT = J$ gilt.

Aufgabe 40
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und $\chi_A(x)$ ihr charakteristisches Polynom.

(a) Zeigen Sie, dass $\chi_A(A) = 0$.
Hinweis: Verwenden Sie die Existenz einer Jordanschen Normalform von A.

(b) Erklären Sie, warum folgende Zeile KEINEN korrekten Beweis liefert:

$$\chi_A(A) = \det(AI - A) = \det(A - A) = 0$$