Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 09 – 13.05.2020

Aufgabe 41
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie:

$$\operatorname{spec}(p(A)) = \{p(\lambda) \mid \lambda \in \operatorname{spec}(A)\}.$$

Aufgabe 42
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ gibt, sodass $A^{-1} = p(A)$. Finden Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

so ein Polynom und berechnen Sie damit die inverse Matrix von A.

Aufgabe 43

(a) Sei σ_U die orthogonale Spiegelung an der Ebene

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Matrix von σ_U bezüglich einer geeigneten Orthonormalbasis und bezüglich der Standardbasis.

(b) Sei σ_V die orthogonale Spiegelung an der Ebene

$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Bestimmen Sie die Matrix der Hintereinanderausführung $\rho = \sigma_V \circ \sigma_U$ bezüglich der Standardbasis und zeigen Sie, dass ρ eine Drehung ist. Berechnen Sie die Drehachse und den Drehwinkel von ρ.

Aufgabe 44
Zeigen Sie, dass eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann normal ist, wenn R eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 45
Berechnen Sie eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, die die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & i & -1 \\ -1 & i & 1 & i \\ i & -1 & i & 1 \\ 1 & i & -1 & i \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.