Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 10 – 20.05.2020

Aufgabe 46
Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann normal ist, wenn es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad kleiner n gibt, sodass $A^* = p(A)$.
Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 15, dass für je zwei Vektoren $(x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots y_n) \in \mathbb{C}^n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad kleiner n existiert, sodass $p(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 47
Zeigen Sie, dass $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann positiv semidefinit ist, wenn eine positiv semidefinite Matrix B existiert, sodass $B^2 = A$. Zeigen Sie weiters, dass diese Matrix B eindeutig bestimmt ist.
Anmerkungen: Eine positiv semidefinite Matrix ist per Definition hermitesch.
Jede Matrix B mit $A = B^2$ wird als (Quadrat-)Wurzel von A bezeichnet.

Aufgabe 48
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 2 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

positiv semidefinit ist und bestimmen Sie ihre (positiv semidefinite) Wurzel $A^{1/2}$.

Aufgabe 49
Wir bezeichnen mit $J_k(\lambda)$ einen Jordanblock der Länge k zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $J_k(0)$ für $k \geq 2$ keine Quadratwurzel besitzt, d.h., dass es keine Matrix $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ gibt, sodass $B^2 = J_k(0)$.
(b) Berechnen Sie eine Wurzel von $J_3(\lambda)$ für $\lambda \neq 0$.

Aufgabe 50
Bestimmen Sie den Mittelpunkt und eine Drehung, die die quadratische Form

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2x^2 + 72xy - 23y^2 + 118y - 76x - 102 = 0\}$$

in Diagonalform überführt. Skizzieren Sie den durch Q gegebenen Kegelschnitt.