Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 11 – 27.05.2020

Aufgabe 51
Bestimmen Sie die Choleskyzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 52
Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A. Zeigen Sie:

(a) Wenn A positiv definit ist, dann gilt $\det(A) \le \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
Hinweis: Die Cholesky-Zerlegung von A könnte hilfreich sein.

(b) Es gilt $|\det A| \le \prod_{i=1}^n \|a_i\|$, wobei $\|a_i\| = \sqrt{a_i^* a_i}$ die durch das Standardskalarprodukt induzierte Norm ist.

Aufgabe 53
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine positiv semidefinite Matrix und $a_{ii} = 0$ für ein $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass alle Einträge in der i-ten Zeile und Spalte verschwinden, d.h. gleich null sind.

Aufgabe 54

(a) Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn es einen Spaltenvektoren $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{C}_n$ gibt, sodass

$$A = \sum_{i=1}^m x_i x_i^*.$$

Hinweis: Aufgabe 31.

(b) Seien $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv semidefinite Matrizen. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A \circ B := (a_{ij} b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

ebenfalls positiv semidefinit ist.

Aufgabe 55
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (nicht unbedingt verschieden). Zeigen Sie, dass der numerische Wertebereich $W(A) = \{x^* A x \mid x \in \mathbb{C}_n, \|x\| = 1\}$ genau die konvexe Hülle der Eigenwerte ist, d.h.

$$W(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i \mid \alpha_i \in [0,1],\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1 \right\}.$$