

Aufgabe 56

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix. Zeigen Sie:

- (a) A ist positiv semidefinit $\Rightarrow$ Die Determinanten $\det(A_{(k)})$ aller führenden Hauptminoren $A_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$ sind nichtnegativ.
- (b) Die Umkehrung in (a) ist im Allgemeinen nicht gültig.

Aufgabe 57

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine positiv semidefinite Matrix.

- (a) Sei $x \in \mathbb{C}_n$. Zeigen Sie, dass $x^* Ax = 0$ genau dann gilt, wenn $Ax = 0$.
Hinweis: Aufgabe 47.
- (b) Zeigen Sie, dass für jede Matrix $C \in \mathbb{C}^{n \times m}$ die Summe $\ker(C^*) + \operatorname{im}(C)$ direkt ist.
- (c) Seien $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$, $C \in \mathbb{C}^{k \times (n-k)}$ und $D \in \mathbb{C}^{(n-k) \times (n-k)}$ Teilmatrizen von A , sodass

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^* & D \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{im}(C) \subseteq \operatorname{im}(B)$ gilt.

Aufgabe 58

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Sei weiters $B \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$ die Teilmatrix von A , sodass $A = \begin{pmatrix} B & c \\ c^* & \gamma \end{pmatrix}$ und seien $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$ die Eigenwerte von B . Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Hinweis: Eine mögliche Vorgangsweise ist wie folgt:

Sei $\{w_1, \dots, w_{n-1}\}$ eine ONB des $\mathbb{C}_{n-1}$ aus Eigenvektoren von B , wobei $Bw_i = \mu_i w_i$. Betrachten Sie für $k = 1, \dots, n-1$ den Unterraum

$$W_k = L\left(\left\{\begin{pmatrix} w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}, e_n\right\}\right)$$

des $\mathbb{C}_n$ und verwenden Sie das Min-Max-Prinzip, um $\lambda_{k+1} \geq \mu_k$ zu zeigen. Die umgekehrte Richtung $\lambda_k \leq \mu_k$ folgt dann analog bei Betrachtung der Matrix $-A$.

Aufgabe 59

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix und $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ihre Eigenwerte in absteigender Ordnung. Für gegebenes $k \in \{1, \dots, n\}$ seien $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k$ die Eigenwerte des k -ten Hauptminors $A_{(k)}$ in absteigender Ordnung. Zeigen Sie:

$$\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{j+n-k} \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}.$$

Aufgabe 60

Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4+2i & 1+i/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4-2i & 3 & 0 & 1+i & 3/2 \\ i & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3+i & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2+i & -3i \end{pmatrix}$$

durch (a) zeilenweise und (b) spaltenweise Berechnung und skizzieren Sie die Kreise in $\mathbb{C}$. Geben Sie eine möglichst kleine Teilmenge von $\mathbb{C}$ an, in der alle Eigenwerte liegen.