Lineare Algebra 2 (NAWI) – SS 2020

Übungsblatt 13 – 10.06.2020

Aufgabe 61
Zeigen Sie, dass die folgende Aussage im Allgemeinen falsch ist:
Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$r_k = \min \left\{ \sum_{i\neq k} |a_{i,k}| \, , \sum_{i\neq k} |a_{k,i}| \right\}.$$

Dann sind alle Eigenwerte enthalten in der Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(a_{kk}, r_k)$ aller Kreise mit Mittelpunkt a_{kk} und Radius r_k.
Hinweis: Ein Gegenbeispiel existiert bereits in $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Aufgabe 62
Sei $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Matrix und

$$G(A) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(a_{kk}, \sum_{i\neq k} |a_{ki}|)$$

die Vereinigung der Gerschgorin-Zeilenkreise von A. Sei weiters $D = \operatorname{diag}(w_1, \dots, w_n)$ mit positiven Gewichten $w_1, \dots, w_n > 0$.

(a) Zeigen Sie:

$$G(D^{-1}AD) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}(a_{kk}, \frac{1}{w_k} \sum_{i\neq k} w_i |a_{ki}|).$$

(b) Sei U eine Vereinigung von l Gerschgorin-Zeilenkreisen von $D^{-1}AD$, die disjunkt zu den restlichen $n - l$ Gerschgorin-Zeilenkreisen von $D^{-1}AD$ ist. Zeigen Sie, dass U genau l Eigenwerte von A enthält (mit algebraischer Vielfachheit gezählt).

(c) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A in

$$\bigcap_{\substack{D=\operatorname{diag}(w_1,\dots,w_n),\\ w_1,\dots,w_n>0}} G(D^{-1}AD)$$

enthalten sind.

Aufgabe 63
Finden Sie möglichst gute Abschätzungen für die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & 2 \\ -5 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

ohne diese explizit zu berechnen. Verwenden Sie dazu die Diagonalmatrizen $D = \operatorname{diag}(1, 1, t)$ mit $t \in \{1/4, 1, 2, 4\}$, um die Mengen $G(D^{-1}AD)$ aus Aufgabe 62 zu bestimmen. Erklären Sie, warum aus den Berechnungen folgt, dass A regulär ist.

Aufgabe 64
Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix. Zeigen Sie für das Spektrum von A:

$$\sigma(A) = \bigcap_{S\in\mathbb{C}^{n\times n} \text{ regulär}} G(S^{-1}AS).$$

Bonus: Zeigen Sie, dass die Aussage für jede Matrix A gilt.
Für eine vollständige Lösung der Bonusaufgabe werden bis zu 2 Tafelpunkte vergeben.

Aufgabe 65

(a) Sei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie

$$p(\overline{\lambda}) = 0.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit n paarweise disjunkten Gerschgorinkreisen, die nur reelle Werte auf der Diagonale hat und deren charakteristisches Polynom $\chi_A(x)$ nur reelle Koffizienten besitzt. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte von A reell sind.
Insbesondere besitzt eine reelle Matrix mit n paarweise disjunkten Gerschgorinkreisen nur reelle Eigenwerte.