

Aufgabe 66

Seien V und W endlichdimensionale normierte Vektorräume mit Normen $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\|\cdot\|_{V,W} : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sup_{x \in V \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_W}{\|x\|_V}$$

ist eine mit $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ verträgliche Norm auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen $\mathcal{L}(V, W)$ gegeben.

(b) $\|f\|_{V,W} = \inf\{K : \|f(x)\|_W \leq K \cdot \|x\|_V \quad \forall x \in V\}$.

(c) Die Aussage in (a) ist im Allgemeinen falsch, wenn V nicht endlichdimensional ist.

Aufgabe 67

(a) Seien $(U, \|\cdot\|_U), (V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ normierte Vektorräume. Zeigen Sie, dass für lineare Abbildungen $f \in \mathcal{L}(V, W), g \in \mathcal{L}(U, V)$ gilt:

$$\|f \circ g\|_{U,W} \leq \|f\|_{V,W} \|g\|_{U,V}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für die Matrixnorm $\|\cdot\|_{1,1}$ auf $C^{m \times n}$ gilt:

$$\|A\|_{1,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Aufgabe 68

Für $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei die Abbildung $\|A\|_G = n \cdot \max_{i,j} |a_{ij}|$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $\|\cdot\|_G$ ist eine Norm.

(b) $\|\cdot\|_G$ ist submultiplikativ, das heißt für alle $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

(c) Für jede submultiplikative Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ existiert eine Vektornorm $\|\cdot\|_V$ auf $V := \mathbb{C}_n$, sodass $\|\cdot\|$ mit $\|\cdot\|_V$ verträglich ist.

(d) Finden Sie eine zu $\|\cdot\|_G$ verträgliche Norm auf $\mathbb{C}_n$.

Aufgabe 69

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}_n$. Für $A \in C^{n \times n}$ sei

$$N_{\|\cdot\|}(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \|a_i\|,$$

wobei a_i die i -te Spalte von A bezeichnet. Weiters sei $D_A = \text{diag}(d_1(A), \dots, d_n(A))$, wobei $d_i(A) = \|a_i\|$ wenn $a_i \neq 0$ und $d_i(A) = 1$ sonst. Zeigen Sie:

(a) $N_{\|\cdot\|}(\cdot)$ ist eine Norm auf $\mathbb{C}^{n \times n}$.

(b) $N_{\|\cdot\|}(\cdot)$ ist genau dann submultiplikativ, wenn $\|x\| \geq \|x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{C}_n$ gilt.

(c) $N_{\|\cdot\|}(AD_A^{-1}) \leq 1$.

(d) $|\det(A)| \leq \|a_1\|_1 \cdots \|a_n\|_1$.

Aufgabe 70

Sei $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} I & B \\ B^* & I \end{pmatrix}$$

genau dann positiv definit ist, wenn $\|B\|_{2,2} < 1$ gilt.