Aufgabe 1. Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 2. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (a) Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{4,5}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{4,5}^{(r)}$.

(b) Bestimme jeweils eine Basis für den Spaltenraum und den Zeilenraum.

Aufgabe 4. Ein *Kettenkomplex* C ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$0 = V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

mit der Eigenschaft, daß $\operatorname{im} f_{k+1} \subseteq \ker f_k$ für alle $0 \leq k \leq n-1$, d.h., $f_k \circ f_{k+1} = 0$. Der Quotientenraum $H_k(C) = \ker f_k / \operatorname{im} f_{k+1}$ heißt *k-te Homologie* des Komplexes. Zeige, daß für endlichdimensionale Kettenkomplexe (d.h., $\dim V_k < \infty$ für alle k) die Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim V_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim H_k(C).$$

Aufgabe 5. Bestimme die LR-Zerlegung $A = PLR$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und löse damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der rechten Seite

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$