Aufgabe 6. Zwei $n \times n$-Matrizen A und B *kommutieren* miteinander, wenn $AB = BA$.

(a) Zeige, daß die Menge $\{A\}'$ aller Matrizen, die mit einer gegebenen $n \times n$-Matrix A kommutieren, einen Unterraum von $\mathbb{K}_{n \times n}$ bildet. Zeige, daß dieser Unterraum auch bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.,

$$B \in \{A\}' \land C \in \{A\}' \implies B \cdot C \in \{A\}'.$$

(b) Bestimme die Menge aller Matrizen, die mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren.

Aufgabe 7. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine *nilpotente* Matrix, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodaß $A^k = 0$.

(a) Zeige, daß $I - A$ invertierbar ist mit $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

(b) Verwende (a), um die die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 8. (a) Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und u, v Spaltenvektoren (d.h. $n \times 1$-Matrizen), sodaß gilt $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$. Zeige, daß $(A + uv^t)$ invertierbar ist und daß

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} u v^t A^{-1}.$$

(b) Wende die Formel an, um die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

möglichst effizient zu bestimmen.

Aufgabe 9. Bestimme die Matrix der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_A(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basen $B = (b_1, b_2, b_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $C = (c_1, c_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ wobei

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) direkt;

(b) unter Zuhilfenahme der vorher berechneten Basistransformationsmatrizen T_E^B und T_C^E.