

Aufgabe 10. Bestimme die Matrixdarstellung $\Phi_C^B(f_A)$ der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto x \cdot p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen $B = \{1, x, x^2 - 1\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ und $C = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - 2x\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

Aufgabe 11. Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimme π^{-1} sowie π^k für $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Bestimme alle Fehlstände von π und berechne $\text{sign } \pi$.
- (c) Zerlege π in ein Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 12. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt *zyklisch*, wenn es ein $k \geq 1$ und eine Folge $i_1, i_2, \dots, i_k$ gibt sodaß $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq k-1$, $\pi(i_k) = i_1$ und $\pi(i) = i$ für $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$; d.h.,

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1.$$

und alle anderen i werden fixiert. Übliche Schreibweise: $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$.

- (a) Zeige, daß zwei zyklische Permutationen $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ und $\rho = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ kommutieren ($\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$), wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$.
- (b) Zerlege den Zyklus in ein Produkt von Transpositionen und zeige, daß für eine zyklische Permutation gilt $\text{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$.

Aufgabe 13. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- (a) Zeige, daß die Folge $i, \pi(i), \pi^2(i), \dots$ periodisch ist und daß die erste Zahl, die doppelt auftaucht, genau i ist.
- (b) Die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$, wobei k der kleinste Exponent ist, sodaß $\pi^k(i) = i$ ist, heißt *Zyklus* von i . Zeige, daß die Relation $i \sim j : \iff j$ liegt im Zyklus von i eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, \dots, n\}$ definiert.
- (c) Zeige, daß jede Permutation als Produkt von kommutierenden Zyklen geschrieben werden kann.
- (d) Führe diese Zerlegung für die Permutation π aus Aufgabe ?? durch.

Aufgabe 14. Zeige, daß sich jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als Hintereinanderausführung der Permutationen $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$ schreiben läßt.