

Aufgabe 15. Sei $D : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $D(I_n) = 1$
- (ii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \lambda D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle i .
- (iii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle $i \neq j$.

Hier steht $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für $D(A)$, wobei $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Spalten der Matrix A sind. Zeige, daß $D(A) = \det A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Hinweis: Der schwierige Teil ist die Additivität. Zeige zunächst, daß $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ wenn die Spalten a_i linear abhängig sind.

Aufgabe 16. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit drei verschiedenen Methoden (Leibniz, Laplace, Zeilen- und Spaltenumformungen).

Aufgabe 17. Die Zahlen 18270, 16128, 63042, 17304, 17934 sind durch 42 teilbar. Zeige, daß auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

durch 42 teilbar ist, *ohne* die Determinante explizit auszurechnen.

Aufgabe 18. Berechne den Eintrag $(A^{-1})_{4,3}$ der Inversen der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 19. Berechne die Determinanten

$$(a) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & * & \dots & * \\ a_1 & * & \dots & & * \end{vmatrix}$$