Aufgabe 20. (a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeige, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$$

(b) Folgere daraus, daß zu gegebenen paarweise verschiedenen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ und beliebigen $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ genau ein Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit Grad n existiert, sodaß $p(x_i) = y_i$ für alle i.

(c) (*Fleißaufgabe am Computer.*) Bestimme für verschiedene n jeweils ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, sodaß $p(x_k) = |x_k|$, $k = -n, \dots, n$, wobei $x_k = \frac{k}{n}$.

Aufgabe 21. Seien $A \in \mathbb{K}_{m\times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m\times n}$, $D \in \mathbb{K}_{n\times n}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

Aufgabe 22. Seien $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \dots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_11} & b_{i_12} & \dots & b_{i_1m} \\ b_{i_21} & b_{i_22} & \dots & b_{i_2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m1} & b_{i_m2} & \dots & b_{i_mm} \end{vmatrix}$$

Hinweis: Leibnizformel anwenden.

Aufgabe 23. Seien $P_i = (x_i, y_i)$ paarweise verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, daß die eindeutig bestimmte Gerade g, die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft, durch folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

(b) Zeige, daß der eindeutig bestimmte Kreis k, der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft, durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Was erhält man, wenn die Punkte auf einer Geraden liegen?

(c) Bestimme den Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -3)$, $(4, 5)$.