Aufgabe 24. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeige, daß $\operatorname{rang}(A)$ identisch ist mit der größten Zahl $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$, für die eine nicht verschwindende Unterdeterminante der Ordnung k existiert, d.h., Indexmengen $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, sodaß

$$\begin{vmatrix} a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_k} \\ a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k,j_1} & a_{i_k,j_2} & \cdots & a_{i_k,j_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 25. Bestimme Index und Signatur der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

eine Matrix C, sodaß $C^*AC = D$ (Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{+1, -1, 0\}$ und eine Basis B des $\mathbb{R}^4$ sodaß $x^tAy = \Phi_B(x)^t D \Phi_B(y)$.

Aufgabe 26. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix. Zeige:
(a) $A \geq 0 \iff \exists B \in \mathbb{C}^{n\times n}$: $A = B^*B$.
(b) $A > 0 \implies A$ regulär und $A^{-1} > 0$.
(c) Sei $A \geq 0 \implies a_{ii} \geq 0$ für alle i und wenn für ein i der Diagonaleintrag $a_{ii} = 0$ ist, dann ist $a_{ij} = 0$ für alle j.
(d) Gilt das folgende verallgemeinerte Hauptminorenkriterium?
„*Eine $n \times n$-Matrix A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\det A_r \geq 0$ für alle $r = 1, 2, \dots, n$.*"

Aufgabe 27. Seien $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ selbstadjungierte Matrizen und $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ eine beliebige Matrix. Zeige:
(a) Die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn sowohl A als auch C positiv (semi)definit ist.
(b) Die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} I_m & B \\ B^* & I_n \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn $I_n - B^*B$ positiv (semi)definit ist.

Aufgabe 28. Zeige:
(a) Durch

$$A \leq B :\iff B - A \geq 0$$

(d.h., $B - A$ ist positiv semidefinit) wird eine Ordnungsrelation auf der Menge der selbstadjungierten Matrizen definiert.
(b) Wenn $B > 0$ und $A \geq B$, dann ist $A > 0$.