Aufgabe 29. Berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 30. Sei

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

die *Spur* einer reellen oder komplexen $n \times n$-Matrix A. Zeige:

(a) $\mathrm{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ ist linear und für $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, aber im Allgemeinen *nicht* $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$.
(b) Für $n \times n$-Matrizen A, B mit B invertierbar gilt $\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) = \mathrm{Tr}(A)$.
(c) Zeige, daß es keine Matrizen A und B gibt, sodaß $AB - BA = I$.
(d) Zeige, daß $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^*A)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n\times n}$ definiert.
(e) Finde eine reelle Matrix A, sodaß $\mathrm{Tr}(A^2) < 0$.
(f) Zeige, daß für eine fixe positiv definite hermitesche Matrix Q auch $\langle A, B\rangle_Q = \mathrm{Tr}(B^*QA)$ ein positiv definites Skalarprodukt definiert.
Hinweis: Aufgabe 26 kann hilfreich sein.

Aufgabe 31. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesche Matrizen. Zeige:

(a) $A \geq 0 \iff \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^{n\times 1}$: $A = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^*$.
(b) Sei C die Matrix mit den Einträgen $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$. Wenn $A \geq 0$ und $B \geq 0$, dann ist auch $C \geq 0$.

Aufgabe 32. Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige:

(a) $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$;
(b) $V = U \dot{+} U^\perp \implies U = U^{\perp\perp}$.
(c) Zeige, daß die folgende Konstruktion ein Gegenbeispiel zur Umkehrung des vorhergehenden Punktes liefert: $V = C[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ und dem Unterraum $U = \{f \in C[-1, 1] \mid f(t) = 0 \forall t < 0\}$.

Aufgabe 33. Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^T A)$ das Skalarprodukt aus Aufgabe 30. Bestimme das orthogonale Komplement

$$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^T\}^\perp.$$