Aufgabe 37. (a) Zeige, daß durch

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(t) g(t)\, dt$$

ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert wird.

(b) Orthogonalisiere die kanonische Basis $(1, x, x^2)$ des Unterraums $\mathbb{R}_2[x]$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 38. Gegeben seien die Daten $\vec{x} = (-2, -1, 1, 2)$ und $y = (1, 1, -1, 1)$. Bestimme mittels einer Orthogonalprojektion die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der quadratischen Polynomfunktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \end{aligned}$$

so, daß der Wert

$$\sum_{i=1}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Begründe, daß die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 39. Auf $V = \mathbb{R}^2$ sei das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = u^t A v$ gegeben wobei $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Bestimme die zur linearen Abbildung $f(x, y) = (2x - y, x + y)$ adjungierte Abbildung.

Aufgabe 40. Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$. Zeige, daß die Matrixdarstellung der transponierten Abbildung

$$\begin{aligned} f^t : W^* &\to V^* \\ w^* &\mapsto w^* \circ f \end{aligned}$$

bezüglich der dualen Basen C^* und B^* die Matrixdarstellung

$$\Phi_{B^*}^{C^*}(f^t) = \Phi_C^B(f)^t$$

hat.

Aufgabe 41. (a) Bestimme die zur Basis

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

duale Basis von $(\mathbb{R}^4)^*$.

(b) Bestimme die Matrix der eindeutigen (warum?) Projektionsabbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\operatorname{im} \varphi = \mathcal{L}\{(1, 2, 1, 0)^t, (1, 0, -1, 1)^t\}$ und $\ker \varphi = \mathcal{L}\{(-1, -2, 2, -1)^t, (2, -1, 1, 1)^t\}$.