Aufgabe 47. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 & 3 \\ -15 & -9 & 4 & -5 \\ 15 & 9 & -4 & 5 \\ 12 & 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie, wenn möglich, eine Matrix B, sodaß $B^{-1}AB = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Aufgabe 48. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeige:

(a) Wenn $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom ist, sodaß $p(A) = 0$, dann erfüllen alle Eigenwerte $\lambda \in \operatorname{spec} A$ die Gleichung $p(\lambda) = 0$.

(b) Wenn A regulär ist, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} gegeben durch

$$\operatorname{spec} A^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \operatorname{spec} A\}$$

und die jeweils zugehörigen Eigenräume sind die gleichen.

Aufgabe 49. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ kommutierende Matrizen ($AB = BA$) mit der Eigenschaft, dass $\ker A \cap \ker B = \{0\}$.

(a) Zeige, dass $\ker(A^k) \cap \ker(B^l) = \{0\}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Induktion.

(b) Folgere daraus, daß die Haupträume $\ker(\lambda-A)^n$ und $\ker(\mu-A)^n$ für verschiedene Eigenwerte $\lambda, \mu \in \operatorname{spec} A$ trivialen Durchschnitt haben.