Aufgabe 50. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(a) Zeige: es gibt Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit den Eigenschaften
   (a) idempotent $M_i^2 = M_i$
   (b) $M_i M_j = 0$ wenn $i \neq j$
   (c) $\operatorname{rank} M_i = 1$

   sodaß
$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_i.$$
   Zeige außerdem daß $A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k M_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bestimme die Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n$ für die $n \times n$-Matrix
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 51. Sei
$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

(a) Berechne $p(A)$ für ein beliebiges Polynom p.
   Hinweis: Berechne zunächst A^2, A^3,... und beweise die erratene Formel durch Induktion.

(b) Leite daraus einen einfachen Beweis für die Leibnizregel (Aufgabe 46, (a)) her.

Aufgabe 52.

(a) Sei $f : V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum. Zeige, daß auch $f|_W : W \to W$ diagonalisierbar ist.

(b) Seien A, $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbare Matrizen. Zeige, daß $AB = BA$ genau dann gilt, wenn es eine Basis gibt, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und von B sind.
   Hinweis: Zeige zunächst, daß die Eigenräume von A unter B invariant sind.

Aufgabe 53. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix. Zu einem gegebenen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ betrachten wir die Folge $v, Av, A^2v, \dots$. Sei
$$m = \inf\{k \mid \exists c_0, c_1, \dots, c_{k-1} : A^k v = c_0 v + c_1 Av + \dots + c_{k-1} A^{k-1} v\}.$$
Zeige:

(a) $m < \infty$

(b) $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ sind linear unabhängig.

(c) $U_v = \mathcal{L}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ ist der kleinste A-invariante Unterraum, der v enthält.

(d) Sei $A^m v = \sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i v$. Berechne die Matrixdarstellung der Einschränkung $C = \Phi_B^B(f_A\big|_{U_v})$ bezüglich der Basis $B = (v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v)$.

Aufgabe 54. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit $p(A)q(A) = 0$ und $\operatorname{ggT}(p(x), q(x)) = 1$. Zeige, daß $\operatorname{im} q(A) = \ker p(A)$.

(b) Sei A eine idempotente Matrix ($A^2 = A$). Zeige, daß A diagonalisierbar ist.