Aufgabe 58. Berechne und interpretiere die Auswertung der Exponentialfunktion des Kreuzprodukts:

$$e^{\vec{\varphi}\times}\vec{v} = \vec{v} + \vec{\varphi}\times\vec{v} + \frac{1}{2!}\vec{\varphi}\times(\vec{\varphi}\times\vec{v}) + \frac{1}{3!}\vec{\varphi}\times(\vec{\varphi}\times(\vec{\varphi}\times\vec{v})) + \dots$$

wobei $\vec{\varphi} := (\varphi, 0, 0)^t$. *Hinweis*: Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\vec{\varphi}\times : \vec{x} \mapsto \vec{\varphi}\times\vec{x}$.

Aufgabe 59. Berechne eine unitäre Matrix U, die die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 1 & i \\ 1 & i & i & -1 \\ -1 & i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Aufgabe 60. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine normale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Zeige, daß für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|Ax\| \le \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| \, \|x\|$$

Aufgabe 61. Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist normal genau dann, wenn es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\le n$ gibt, sodaß $A^* = p(A)$.

Aufgabe 62. Berechne eine Schursche Normalform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$