

Zur Wiederholung ein Extrablatt mit Aufgaben aus Klausuren der vergangenen Jahre. Es ist nichts anzukreuzen!

Aufgabe 63. Wie groß muß x sein, damit die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$$

positiv definit ist?

Aufgabe 64. Auf dem Raum $V = C([-2, 2], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[-2, 2]$ nach $\mathbb{R}$ betrachten wir das innere Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^2 f(x)g(x) dx.$$

Sei $U \subseteq V$ der Unterraum aller Funktionen der Form $a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, daß für eine gegebene Funktion $f \in V$ die orthogonale Projektion auf U durch Funktion $u(x) = a + bx$ mit

$$a = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt \quad b = \frac{3}{16} \int_{-2}^2 t f(t) dt$$

gegeben ist.

Aufgabe 65. Sei A die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & 3 \\ & & & 2 & 3 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestimme für jeden Eigenwert λ jeweils Basen der Eigenräume und Haupträume sowie die Dimensionen $\dim \ker(\lambda I - A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Bestimme die Jordansche Normalform J und eine reguläre Matrix T , sodaß $T^{-1}AT = J$.
- (c) Bestimme das Minimalpolynom von A .

Aufgabe 66. Bestimme eine orthogonale Matrix U , sodaß $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 67. Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda (\lambda + 1)^4$$

und Minimalpolynom

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda(\lambda + 1)^2;$$

bestimme alle (bis auf Permutation) verschiedenen möglichen Jordanschen Normalformen.

Aufgabe 68. Sei A eine hermitesche Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A genau dann im Intervall $[\alpha, \beta]$ liegen, wenn sowohl $A - \alpha I$ als auch $\beta I - A$ positiv semidefinit ist.