Aufgabe 1. Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 2. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (a) Bringe die Matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -4 & 7 & 9 & 12 \\ -1 & 1 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

in möglichst wenigen Schritten auf die Form $I_{4,5}^{(r)}$ und bestimme Matrizen P und Q sodaß $PAQ = I_{4,5}^{(r)}$.

(b) Bestimme jeweils eine Basis für den Spaltenraum und den Zeilenraum.

Aufgabe 4. Ein *Kettenkomplex* C ist eine Folge von linearen Abbildungen

$$0 = V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_{n-2} \xrightarrow{f_{n-2}} \dots \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

mit der Eigenschaft, daß $\text{im } f_{k+1} \subseteq \ker f_k$ für alle $0 \leq k \leq n-1$, d.h., $f_k \circ f_{k+1} = 0$. Der Quotientenraum $H_k(C) = \ker f_k / \text{im } f_{k+1}$ heißt *k-te Homologie* des Komplexes. Zeige, daß für endlichdimensionale Kettenkomplexe (d.h., $\dim V_k < \infty$ für alle k) die Formel gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim V_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim H_k(C).$$

Aufgabe 5. Bestimme die *LR-Zerlegung* $A = PLR$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 9 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

und löse damit das Gleichungssystem $Ax = b$ mit der rechten Seite

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 6. Zwei $n \times n$ -Matrizen A und B kommutieren miteinander, wenn $AB = BA$.

- (a) Zeige, daß die Menge $\{A\}'$ aller Matrizen, die mit einer gegebenen $n \times n$ -Matrix A kommutieren, einen Unterraum von $\mathbb{K}_{n \times n}$ bildet. Zeige, daß dieser Unterraum auch bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen ist, d.h.,

$$B \in \{A\}' \wedge C \in \{A\}' \implies B \cdot C \in \{A\}'.$$

- (b) Bestimme die Menge aller Matrizen, die mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kommutieren.

Aufgabe 7. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine nilpotente Matrix, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodaß $A^k = 0$.

- (a) Zeige, daß $I - A$ invertierbar ist mit $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$.
 (b) Verwende (a), um die die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 8. (a) Sei A eine invertierbare $n \times n$ -Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und u, v Spaltenvektoren (d.h. $n \times 1$ -Matrizen), sodaß gilt $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$. Zeige, daß $(A + uv^t)$ invertierbar ist und daß

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^t A^{-1}.$$

- (b) Wende die Formel an, um die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

möglichst effizient zu bestimmen.

Aufgabe 9. Bestimme die Matrix der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_A(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

bezüglich der Basen $B = (b_1, b_2, b_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ und $C = (c_1, c_2) \subseteq \mathbb{R}^2$ wobei

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- (a) direkt;
 (b) unter Zuhilfenahme der vorher berechneten Basistransformationsmatrizen T_E^B und T_C^E .

Aufgabe 10. Bestimme die Matrixdarstellung $\Phi_C^B(f_A)$ der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_2[x] &\rightarrow \mathbb{R}_3[x] \\ p(x) &\mapsto x \cdot p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen $B = \{1, x, x^2 - 1\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ und $C = \{1, x, x^2 - 1, x^3 - 2x\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

Aufgabe 11. Gegeben sei die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Bestimme π^{-1} sowie π^k für $k \in \mathbb{N}$.
- Bestimme alle Fehlstände von π und berechne $\text{sign } \pi$.
- Zerlege π in ein Produkt von Transpositionen.

Aufgabe 12. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt *zyklisch*, wenn es ein $k \geq 1$ und eine Folge $i_1, i_2, \dots, i_k$ gibt sodaß $\pi(i_j) = i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq k-1$, $\pi(i_k) = i_1$ und $\pi(i) = i$ für $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$; d.h.,

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1.$$

und alle anderen i werden fixiert. Übliche Schreibweise: $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$.

- Zeige, daß zwei zyklische Permutationen $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ und $\rho = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ kommutieren ($\pi \circ \rho = \rho \circ \pi$), wenn $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_l\} = \emptyset$.
- Zerlege den Zyklus in ein Produkt von Transpositionen und zeige, daß für eine zyklische Permutation gilt $\text{sign}(\pi) = (-1)^{k-1}$.

Aufgabe 13. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$ eine Permutation und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- Zeige, daß die Folge $i, \pi(i), \pi^2(i), \dots$ periodisch ist und daß die erste Zahl, die doppelt auftaucht, genau i ist.
- Die Folge $(i, \pi(i), \pi^2(i), \dots, \pi^{k-1}(i))$, wobei k der kleinste Exponent ist, sodaß $\pi^k(i) = i$ ist, heißt *Zyklus* von i . Zeige, daß die Relation $i \sim j : \iff j$ liegt im Zyklus von i eine Äquivalenzrelation auf $\{1, 2, \dots, n\}$ definiert.
- Zeige, daß jede Permutation als Produkt von kommutierenden Zyklen geschrieben werden kann.
- Führe diese Zerlegung für die Permutation π aus Aufgabe 11 durch.

Aufgabe 14. Zeige, daß sich jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ als Hintereinanderausführung der Permutationen $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$ schreiben läßt.

Aufgabe 15. Sei $D : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $D(I_n) = 1$
- (ii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \lambda a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = \lambda D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle i .
- (iii) $D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + a_j, a_{i+1}, \dots, a_n) = D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) + D(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \dots, a_n)$ für alle $i \neq j$.

Hier steht $D(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für $D(A)$, wobei $a_1, a_2, \dots, a_n$ die Spalten der Matrix A sind. Zeige, daß $D(A) = \det A$ für alle $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

Hinweis: Der schwierige Teil ist die Additivität. Zeige zunächst, daß $D(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ wenn die Spalten a_i linear abhängig sind.

Aufgabe 16. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit drei verschiedenen Methoden (Leibniz, Laplace, Zeilen- und Spaltenumformungen).

Aufgabe 17. Die Zahlen 18270, 16128, 63042, 17304, 17934 sind durch 42 teilbar. Zeige, daß auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 2 & 8 \\ 6 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

durch 42 teilbar ist, *ohne* die Determinante explizit auszurechnen.

Aufgabe 18. Berechne den Eintrag $(A^{-1})_{4,3}$ der Inversen der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 19. Berechne die Determinanten

$$(a) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} \quad (b) \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix} \quad (c) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & * \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & * & \dots & * \\ a_1 & * & \dots & & * \end{vmatrix}$$

Aufgabe 20. (a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Zeige, daß

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (a_j - a_i)$$

(b) Folgere daraus, daß zu gegebenen paarweise verschiedenen Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ und beliebigen $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ genau ein Polynom $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ mit Grad n existiert, sodaß $p(x_i) = y_i$ für alle i .

(c) (*Fleißaufgabe am Computer.*) Bestimme für verschiedene n jeweils ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, sodaß $p(x_k) = |x_k|$, $k = -n, \dots, n$, wobei $x_k = \frac{k}{n}$.

Aufgabe 21. Seien $A \in \mathbb{K}_{m \times m}$, $B \in \mathbb{K}_{m \times n}$, $D \in \mathbb{K}_{n \times n}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

Aufgabe 22. Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ Matrizen. Zeige, daß

$$\det(AB) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_m} \begin{vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \dots & a_{1i_m} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \dots & a_{2i_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \dots & a_{mi_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{i_1 1} & b_{i_1 2} & \dots & b_{i_1 m} \\ b_{i_2 1} & b_{i_2 2} & \dots & b_{i_2 m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i_m 1} & b_{i_m 2} & \dots & b_{i_m m} \end{vmatrix}$$

Hinweis: Leibnizformel anwenden.

Aufgabe 23. Seien $P_i = (x_i, y_i)$ paarweise verschiedene Punkte im $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, daß die eindeutig bestimmte Gerade g , die durch die Punkte P_1 und P_2 verläuft, durch folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$g = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

(b) Zeige, daß der eindeutig bestimmte Kreis k , der durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 verläuft, durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Was erhält man, wenn die Punkte auf einer Geraden liegen?

(c) Bestimme den Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $(-4, 1)$, $(-2, -3)$, $(4, 5)$.

Aufgabe 24. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeige, daß $\text{rang}(A)$ identisch ist mit der größten Zahl $k \in \{1, 2, \dots, \min(m, n)\}$, für die eine nicht verschwindende Unterdeterminante der Ordnung k existiert, d.h., Indexmengen $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ und $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, sodaß

$$\begin{vmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_k} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k, j_1} & a_{i_k, j_2} & \cdots & a_{i_k, j_k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aufgabe 25. Bestimme Index und Signatur der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

eine Matrix C , sodaß $C^*AC = D$ (Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{+1, -1, 0\}$) und eine Basis B des $\mathbb{R}^4$ sodaß $x^t Ay = \Phi_B(x)^t D \Phi_B(y)$.

Aufgabe 26. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix. Zeige:

- $A \geq 0 \iff \exists B \in \mathbb{C}^{n \times n}: A = B^*B$.
- $A > 0 \implies A$ regulär und $A^{-1} > 0$.
- Sei $A \geq 0 \implies a_{ii} \geq 0$ für alle i und wenn für ein i der Diagonaleintrag $a_{ii} = 0$ ist, dann ist $a_{ij} = 0$ für alle j .
- Gilt das folgende verallgemeinerte Hauptminorenkriterium?
„Eine $n \times n$ -Matrix A ist positiv semidefinit genau dann, wenn $\det A_r \geq 0$ für alle $r = 1, 2, \dots, n$.“

Aufgabe 27. Seien $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungierte Matrizen und $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix. Zeige:

(a) Die Blockdiagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn sowohl A als auch C positiv (semi)definit ist.

(b) Die Blockmatrix

$$\begin{bmatrix} I_m & B \\ B^* & I_n \end{bmatrix}$$

ist genau dann positiv (semi)definit, wenn $I_n - B^*B$ positiv (semi)definit ist.

Aufgabe 28. Zeige:

(a) Durch

$$A \leq B : \iff B - A \geq 0$$

(d.h., $B - A$ ist positiv semidefinit) wird eine Ordnungsrelation auf der Menge der selbstadjungierten Matrizen definiert.

(b) Wenn $B > 0$ und $A \geq B$, dann ist $A > 0$.

Aufgabe 29. Berechne die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 30. Sei

$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

die *Spur* einer reellen oder komplexen $n \times n$ -Matrix A . Zeige:

- $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ ist linear und für $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ gilt $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$, aber im Allgemeinen *nicht* $\operatorname{Tr}(ABC) = \operatorname{Tr}(ACB)$.
- Für $n \times n$ -Matrizen A, B mit B invertierbar gilt $\operatorname{Tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{Tr}(A)$.
- Zeige, daß es keine Matrizen A und B gibt, sodaß $AB - BA = I$.
- Zeige, daß $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^*A)$ ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ definiert.
- Finde eine reelle Matrix A , sodaß $\operatorname{Tr}(A^2) < 0$.
- Zeige, daß für eine fixe positiv definite hermitesche Matrix Q auch $\langle A, B \rangle_Q = \operatorname{Tr}(B^*QA)$ ein positiv definites Skalarprodukt definiert.

Hinweis: Aufgabe 26 kann hilfreich sein.

Aufgabe 31. Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesche Matrizen. Zeige:

- $A \geq 0 \iff \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^{n \times 1} : A = \sum_{i=1}^n x_i x_i^*$.
- Sei C die Matrix mit den Einträgen $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$. Wenn $A \geq 0$ und $B \geq 0$, dann ist auch $C \geq 0$.

Aufgabe 32. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige:

- $U^\perp = U^{\perp\perp\perp}$;
- $V = U \dot{+} U^\perp \implies U = U^{\perp\perp}$.
- Zeige, daß die folgende Konstruktion ein Gegenbeispiel zur Umkehrung des vorhergehenden Punktes liefert: $V = C[-1, 1]$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$ und dem Unterraum $U = \{f \in C[-1, 1] \mid f(t) = 0 \forall t < 0\}$.

Aufgabe 33. Sei $V = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^T A)$ das Skalarprodukt aus Aufgabe 30. Bestimme das orthogonale Komplement

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = A^T\}^\perp.$$

Aufgabe 34. Für welche Werte von a und b ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & b+a & -b+a & 0 \\ b+a & 2 & 0 & -b+a \\ -b+a & 0 & 2 & b+a \\ 0 & -b+a & b+a & 2 \end{bmatrix}$$

positiv definit?

Aufgabe 35. Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$. Zeige, daß

$$\text{rank Gram}(v_1, v_2, \dots, v_m) = \dim \mathcal{L}(\{v_1, v_2, \dots, v_m\})$$

Aufgabe 36. Sei

$$U = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^5$ und $v = (1, -1, 1, -1, 1)^t$.

- Berechne die Orthogonalprojektion $\pi_U(v)$ mithilfe der Gramschen Matrix.
- Berechne eine Orthonormalbasis von U .
- Berechne $\pi_U(v)$ mithilfe dieser Orthonormalbasis.
- Berechne die Matrixdarstellung von π_U bezüglich der kanonischen Basis.

Aufgabe 37. (a) Zeige, daß durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)g(t) dt$$

ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$ definiert wird.

(b) Orthogonalisiere die kanonische Basis $(1, x, x^2)$ des Unterraums $\mathbb{R}_2[x]$ bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 38. Gegeben seien die Daten $\vec{x} = (-2, -1, 1, 2)$ und $y = (1, 1, -1, 1)$. Bestimme mittels einer Orthogonalprojektion die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der quadratischen Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2$$

so, daß der Wert

$$\sum_{i=1}^4 (f(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Begründe, daß die Lösung eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 39. Auf $V = \mathbb{R}^2$ sei das Skalarprodukt $\langle u, v \rangle = u^t A v$ gegeben wobei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Bestimme die zur linearen Abbildung $f(x, y) = (2x - y, x + y)$ adjungierte Abbildung.

Aufgabe 40. Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen mit Basen $B \subseteq V$ und $C \subseteq W$. Zeige, daß die Matrixdarstellung der transponierten Abbildung

$$f^t : W^* \rightarrow V^* \\ w^* \mapsto w^* \circ f$$

bezüglich der dualen Basen C^* und B^* die Matrixdarstellung

$$\Phi_{B^*}^{C^*}(f^t) = \Phi_C^B(f)^t$$

hat.

Aufgabe 41. (a) Bestimme die zur Basis

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

duale Basis von $(\mathbb{R}^4)^*$.

(b) Bestimme die Matrix der eindeutigen (warum?) Projektionsabbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $\text{im } \varphi = \mathcal{L}\{(1, 2, 1, 0)^t, (1, 0, -1, 1)^t\}$ und $\text{ker } \varphi = \mathcal{L}\{(-1, -2, 2, -1)^t, (2, -1, 1, 1)^t\}$.

Aufgabe 42. Zeige, daß jede Matrix $U \in SU_2(\mathbb{C})$ (d.h., $U^*U = I$ und $\det U = 1$) die Gestalt

$$U = \begin{bmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{bmatrix}$$

mit $|z|^2 + |w|^2 = 1$ besitzt.

Aufgabe 43. Als *Quaternionen* bezeichnet man den 4-dimensionalen Vektorraum

$$\mathbb{H} = \{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} : a_i \in \mathbb{R}\}$$

über $\mathbb{R}$ mit der formalen Basis $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ und den Multiplikationsregeln

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ik}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

Zeige:

- Die Quaternionen bilden eine assoziative Algebra.
- Jede Quaternion besitzt eine multiplikative Inverse (Hinweis: betrachte die "komplexe Konjugation" $\overline{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}} = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}$).
- Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$$

$$a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \mapsto a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

ist ein Algebrahomomorphismus.

- Zeige, daß $SU_2(\mathbb{C}) \simeq \{q \in \mathbb{H} \mid q\bar{q} = 1\}$. *Hinweis:* vgl. mit Aufgabe 42.

Aufgabe 44. Der *größte gemeinsame Teiler* zweier Polynome $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ über einem Körper $\mathbb{K}$ ist jenes Polynom mit maximalem Grad und führendem Koeffizient 1, das beide Polynome teilt.

- Zeige, daß jeder gemeinsame Teiler von $f(x)$ und $g(x)$ den ggT teilt und daß der ggT($f(x), g(x)$) in der Tat eindeutig festgelegt ist.
- Zeige, daß $\text{ggT}(f(x), g(x)) = \text{ggT}(g(x), f(x) - g(x)h(x))$ für jedes Polynom $h(x)$.
- Folgere daraus den *Euklidischen Algorithmus für Polynome*: Sei (f_k) die Folge von Polynomen, die durch die Vorschrift $f_0 = f$, $f_1 = g$, $f_i = f_{i+1}q_{i+1} + f_{i+2}$ (Divisionsalgorithmus) bestimmt ist. Dann endet das Verfahren mit $f_n = 0$ und $\text{ggT}(f, g) = f_{n-1}$.

Aufgabe 45. Seien

$$p(x) = x^7 - x^5 + x^4 - x^3 + x - 1$$

$$q(x) = x^8 - x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 2.$$

Bestimme $\text{ggT}(p(x), q(x))$ mit dem euklidischen Algorithmus über $\mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 46. Die *Ableitung* eines Polynoms $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$ ist definiert (über einem beliebigen Körper!) als

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Zeige:

- Die Abbildung $p(x) \mapsto p'(x)$ ist linear und es gilt die Leibnizregel

$$(pq)'(x) = p'(x)q(x) + p(x)q'(x).$$

- Wenn $q(x)$ ein irreduzibler Faktor von $p(x)$ mit Vielfachheit ≥ 2 ist (d.h., $p(x) = q(x)^k g(x)$ mit $k \geq 2$), dann ist $q(x)$ auch ein Teiler von $\text{ggT}(p(x), p'(x))$.
- Für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ gilt auch die Umkehrung des vorigen Punktes. Was kann in endlichen Körpern schiefgehen?

Aufgabe 47. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -2 & 3 \\ -15 & -9 & 4 & -5 \\ 15 & 9 & -4 & 5 \\ 12 & 6 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sowie, wenn möglich, eine Matrix B , sodaß $B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Aufgabe 48. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Zeige:

- (a) Wenn $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom ist, sodaß $p(A) = 0$, dann erfüllen alle Eigenwerte $\lambda \in \text{spec } A$ die Gleichung $p(\lambda) = 0$.
- (b) Wenn A regulär ist, dann sind die Eigenwerte von A^{-1} gegeben durch

$$\text{spec } A^{-1} = \{1/\lambda : \lambda \in \text{spec } A\}$$

und die jeweils zugehörigen Eigenräume sind die gleichen.

Aufgabe 49. Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ kommutierende Matrizen ($AB = BA$) mit der Eigenschaft, dass $\ker A \cap \ker B = \{0\}$.

- (a) Zeige, dass $\ker(A^k) \cap \ker(B^l) = \{0\}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Induktion.

- (b) Folgere daraus, daß die Haupträume $\ker(\lambda - A)^n$ und $\ker(\mu - A)^n$ für verschiedene Eigenwerte $\lambda, \mu \in \text{spec } A$ trivialen Durchschnitt haben.

Aufgabe 50. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

(a) Zeige: es gibt Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit den Eigenschaften

(a) idempotent $M_i^2 = M_i$

(b) $M_i M_j = 0$ wenn $i \neq j$

(c) $\text{rank } M_i = 1$

sodaß

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i.$$

Zeige außerdem daß $A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k M_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Bestimme die Matrizen $M_1, M_2, \dots, M_n$ für die $n \times n$ -Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 51. Sei

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

(a) Berechne $p(A)$ für ein beliebiges Polynom p .

Hinweis: Berechne zunächst $A^2, A^3, \dots$ und beweise die erratene Formel durch Induktion.

(b) Leite daraus einen einfachen Beweis für die Leibnizregel (Aufgabe 46, (a)) her.

Aufgabe 52.

(a) Sei $f : V \rightarrow V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und $W \subseteq V$ ein invarianter Unterraum. Zeige, daß auch $f|_W : W \rightarrow W$ diagonalisierbar ist.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbare Matrizen. Zeige, daß $AB = BA$ genau dann gilt, wenn es eine Basis gibt, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und von B sind.

Hinweis: Zeige zunächst, daß die Eigenräume von A unter B invariant sind.

Aufgabe 53. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix. Zu einem gegebenen Vektor $v \in \mathbb{K}^n$ betrachten wir die Folge $v, Av, A^2v, \dots$. Sei

$$m = \inf\{k \mid \exists c_0, c_1, \dots, c_{k-1} : A^k v = c_0 v + c_1 Av + \dots + c_{k-1} A^{k-1} v\}.$$

Zeige:

(a) $m < \infty$

(b) $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ sind linear unabhängig.

(c) $U_v = \mathcal{L}\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$ ist der kleinste A -invariante Unterraum, der v enthält.

(d) Sei $A^m v = \sum_{i=0}^{m-1} c_i A^i v$. Berechne die Matrixdarstellung der Einschränkung $C = \Phi_B^B(f_A|_{U_v})$ bezüglich der Basis $B = (v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v)$.

Aufgabe 54. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x]$ Polynome mit $p(A)q(A) = 0$ und $\text{ggT}(p(x), q(x)) = 1$. Zeige, daß $\text{im } q(A) = \ker p(A)$.

(b) Sei A eine idempotente Matrix ($A^2 = A$). Zeige, daß A diagonalisierbar ist.

Aufgabe 58. Berechne und interpretiere die Auswertung der Exponentialfunktion des Kreuzprodukts:

$$e^{\vec{\varphi} \times} \vec{v} = \vec{v} + \vec{\varphi} \times \vec{v} + \frac{1}{2!} \vec{\varphi} \times (\vec{\varphi} \times \vec{v}) + \frac{1}{3!} \vec{\varphi} \times (\vec{\varphi} \times (\vec{\varphi} \times \vec{v})) + \dots$$

wobei $\vec{\varphi} := (\varphi, 0, 0)^t$. *Hinweis:* Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\vec{\varphi} \times : \vec{x} \mapsto \vec{\varphi} \times \vec{x}$.

Aufgabe 59. Berechne eine unitäre Matrix U , die die Matrix

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 1 & i \\ 1 & i & i & -1 \\ -1 & i & i & 1 \\ i & 1 & -1 & i \end{pmatrix}$$

diagonalisiert.

Aufgabe 60. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine normale Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Zeige, daß für einen beliebigen Vektor $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\|Ax\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \|x\|$$

Aufgabe 61. Zeige: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist normal genau dann, wenn es ein Polynom $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ vom Grad $\leq n$ gibt, sodaß $A^* = p(A)$.

Aufgabe 62. Berechne eine Schursche Normalform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Zur Wiederholung ein Extrablatt mit Aufgaben aus Klausuren der vergangenen Jahre. Es ist nichts anzukreuzen!

Aufgabe 63. Wie groß muß x sein, damit die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$$

positiv definit ist?

Aufgabe 64. Auf dem Raum $V = C([-2, 2], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $[-2, 2]$ nach $\mathbb{R}$ betrachten wir das innere Produkt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-2}^2 f(x)g(x) dx.$$

Sei $U \subseteq V$ der Unterraum aller Funktionen der Form $a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige, daß für eine gegebene Funktion $f \in V$ die orthogonale Projektion auf U durch Funktion $u(x) = a + bx$ mit

$$a = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt \quad b = \frac{3}{16} \int_{-2}^2 tf(t) dt$$

gegeben ist.

Aufgabe 65. Sei A die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 3 & \\ & & & 2 & 3 \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

- Bestimme für jeden Eigenwert λ jeweils Basen der Eigenräume und Haupträume sowie die Dimensionen $\dim \ker(\lambda I - A)^k$ für $k \in \mathbb{N}$.
- Bestimme die Jordansche Normalform J und eine reguläre Matrix T , sodaß $T^{-1}AT = J$.
- Bestimme das Minimalpolynom von A .

Aufgabe 66. Bestimme eine orthogonale Matrix U , sodaß $U^{-1}AU$ eine Diagonalmatrix ist, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 67. Sei A eine Matrix mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \lambda (\lambda + 1)^4$$

und Minimalpolynom

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda(\lambda + 1)^2;$$

bestimme alle (bis auf Permutation) verschiedenen möglichen Jordanschen Normalformen.

Aufgabe 68. Sei A eine hermitesche Matrix. Zeige, daß die Eigenwerte von A genau dann im Intervall $[\alpha, \beta]$ liegen, wenn sowohl $A - \alpha I$ als auch $\beta I - A$ positiv semidefinit ist.