Prüfung aus Mathematik 1E
18. 03. 2005
Stoffsemester: WS 2004/05

---

1. (a) Zeigen Sie, daß die folgende rekursiv gegebene Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert:
$$a_1 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{1}{2} a_n^2}.$$
   (b) Überprüfen Sie folgende Reihe auf absolute Konvergenz, Konvergenz bzw. Divergenz:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{\sqrt{n}\, 5^n}$$

2. Berechnen Sie folgende Integrale:
$$\text{(a)} \quad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot (\cot^2 x - \cot x - 6)} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(3x)\, dx$$

3. Für welche reellen Werte von β ist die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 1 \\ 2 & 1 & \beta \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
invertierbar? Für welche Werte von β besitzt das Gleichungssystem $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung? Berechnen Sie im Fall $\beta = 2$ alle Lösungen des Gleichungssystems
$$A \cdot \vec{x} = (-1,\ 0,\ 1)^T$$

4. Gegeben seien die Funktionen
$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x y - \cos(xy) + 3x^2 \ln(y), \\ x(u,t) &= 2u + t^2, \\ y(u,t) &= e^{2u-1} + tu. \end{aligned}$$
   (a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y)$ im Punkt $(2,1)$ in Richtung $(1,2)$.
   (b) Bestimmen Sie die Tangentialebene von $z = f(x,y)$ im Punkt $(1,1)$.
   (c) Für $f(u,t) = f\big(x(u,t), y(u,t)\big)$ berechne man $\frac{\partial f}{\partial u}$ sowie $\frac{\partial f}{\partial t}$ mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel.

5. Diskutieren Sie die folgende Funktion. Gefragt sind: *Definitionsbereich, Stetigkeitsbereich, Nullstellen, Differenzierbarkeit, lokale Extrema, Wendepunkte, Randverhalten, Monotonie, Konvexität, Skizze*
$$f(x) = x^3 \cdot e^{\frac{|x-1|}{x}}$$

Alle Zwischenschritte sind anzugeben!