

$$④ \quad f(x) = \frac{x^2 - |x| - 1}{|x| + 3} = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 1}{x + 3} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{x^2 + x - 1}{3 - x} & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

* Def'brich: $\mathbb{R}$

* Stetigkeitsbrich: $\mathbb{R}$

* Nullstellen: $x \geq 0$: $x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Nst bei: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

$x \leq 0$: $x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$
Nst bei: $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

* Diff'barkeit: $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{(2x-1)(x+3) - (x^2-x-1)}{(x+3)^2} =$
 $= \frac{2x^2 + 6x - x - 3 - x^2 + x + 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2 + 6x - 2}{(x+3)^2}$

$x \leq 0$: $f'(x) = \frac{(2x+1)(3-x) + (x^2+x-1)}{(3-x)^2} = \frac{6x - 2x^2 + 3 - x + x^2 + x - 1}{(3-x)^2}$
 $= \frac{-x^2 + 6x + 2}{(3-x)^2}$

bei $x=0$? $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \frac{2}{9} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\frac{2}{9}$ nicht diff'bar bei $x=0$

* Extrema: $x \geq 0$: $x^2 + 6x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$x \leq 0$: $-x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+8}}{-2} = 3 \pm \sqrt{11}$

$x \geq 0$: $f''(x) = \frac{(2x+6)(x+3)^2 - 2(x+3)(x^2+6x-2)}{(x+3)^4} = \frac{2x^2 + 6x + 6x + 18 - 2x^2 - 12x + 4}{(x+3)^3}$
 $= \frac{22}{(x+3)^3} > 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte!
Min bei $x = -3 + \sqrt{11}$

$x \leq 0$: $f''(x) = \frac{(-2x+6)(3-x) + (-x^2+6x+2) \cdot 2}{(3-x)^3} = \frac{-6x + 2x^2 + 18 - 6x - 2x^2 + 12x + 4}{(3-x)^3} = \frac{22}{(3-x)^3} > 0$
 $\Rightarrow$ Min bei $x = 3 - \sqrt{11}$
keine WP

Resultat: Max bei $x=0$ (siehe oben)